This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
  A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.

- Evite consultas automatizadas.
  Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento ótico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.

- Mantenha a atribuição.
  A "marca dágua" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.

- Mantenha os padrões legais.
  Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As conseqüências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em `http://books.google.com/`

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA.

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA
POR
M. BOSSUT
DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS
de Paris, Examinador dos Ingenheiros
&c. &c.

TRADUZIDO E ABBREVIADO
do Francez.

COIMBRA:
NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXV.
Por Ordem de Sua Magestade, e com Privilegio Real.

X22
A
65

Wormeen
2-2-43

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para

ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſo he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guardar

dar ſem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle ſeja, naõ obſtante a ſobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar; e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario, as quais Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY.

Marquez de Pombal.

ALvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos: He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos; havendo ceſſado

ceſſado o fim, com que antes fôra Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma aſſima declarada.

Para Voſſa Mageſtade ver.

Joaõ Chriſoſtomo de Faria e Souſa de Vaſconcellos de Sá o fez.

Cumpra-ſe, e regiſte-ſe. Noſſa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Viſitador.

No Livro de Providencia Litteraria deſta Secretaria de Eſtado dos Negocios do Reino fica regiſtado eſte Alvará. Noſſa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

Joaõ Chriſoſtomo de Faria e Souſa de Vaſconcellos de Sá.

TABOA

TABOA

Das materias que ſe contêm neſte Tratado.

Definiçoens, e noçoens gerais - - - - - - - - - - Pag. 1

HYDROSTATICA

CAPITULO I.

DO Equilibrio dos fluidos incompreſſiveis - - - 7
Superficie dos fluidos em equilibrio - - - - 8
Preſſaõ de hum fluido grave contra as paredes de hum vaſo - - - - - - - - - - - - - - - - - 10
Condiçoens do equilibrio nos vaſos flexiveis - - - - 13
Eſpeſſura que devem ter os tubos, para reſiſtirem á preſſaõ dos fluidos - - - - - - - - - - - - - - - - 17
Applicaçaõ dos principios do equilibrio dos fluidos á determinaçaõ da figura da Terra - - - - - - - - - 18

CAPITULO II.

DO equilibrio dos fluidos elaſticos - - - - - - - 25
Preſſaõ de hum fluido elaſtico comprimido pelo proprio pezo contra as paredes de hum vaſo - - - 26
Do equilibrio do ar - - - - - - - - - - - - - - - - - 29
Dilataçoens do ar na maquina pneumatica - - - - - 36
Conſtrucçaõ, e uſo do Barometro - - - - - - - - - 37
Explicaçaõ das variaçoens do Barometro - - - - - - 39
Uſo do Barometro na determinaçaõ das differenças de livel de quaiſquer lugares - - - - - - - - - - - - 42

Theo-

Theorica das Bombas - - - - - - - - - - - - - - - - 44
Explicaçaõ dos effeitos da bomba aſpirante - - - - - 45
— *da bomba comprimente* - - - - - - - - - - - - 50
— *da aſpirante e comprimente* - - - - - - - - - 51
Bomba de fluxo continuo - - - - - - - - - - - - - - 53
Meios de dar movimento ás bombas - - - - - - - - 54

CAPITULO III.

DO equilibrio dos fluidos com os ſolidos - - - - 56
Condiçoens do equilibrio de hum ſolido ſuſtentado por qualquer fluido - - - - - - - - - - - - - - 58
Meios de determinar a gravidade eſpecifica dos ſolidos e dos fluidos - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 60
Problema da Coroa de Hieron - - - - - - - - - - - 61
Uſo do areometro - - - - - - - - - - - - - - - - - - 62
Determinaçaõ das ſituaçoens de equilibrio de differentes figuras - 63
Da eſtabilidade dos corpos fluctuantes - - - - - - - 76
Propoſiçoens preliminares ſobre os pendulos, e ſobre o movimento de rotaçaõ - - - - - - - - - - - ibid.
Condiçoens da eſtabilidade de huma figura plana ſuſtentada ſobre qualquer fluido - - - - - - - - - - - - 79
Applicaçaõ aos balanços dos navios, poſiçaõ do metacentro - 82
Exame circunſtanciado do caſo em que a figura he hum triangulo iſosceles - - - - - - - - - - - - - - 84
Condiçoens da eſtabilidade de hum ſolido ſuſtentado em equilibrio ſobre qualquer fluido - - - - - - - - - 85
Theorica geral das oſcillaçoens dos corpos fluctuantes 86
Principios, em que ſe funda a ſoluçaõ - - - - - - - 87
Equaçoens geraes do problema - - - - - - - - - - - 94
Simplificaçaõ das meſmas equaçoens na fluctuaçaõ dos navios - 95
Applicaçaõ das formulas a hum navio, que tiveſſe a fórma de hum ellipſoide - - - - - - - - - - - - 99

HYDRAULICA.

Difficuldade de eſtabelecer huma theorica exacta do movimento dos fluidos - - - - - - - - - - - - - 105
Idéa geral das tentativas dos Geometras ſobre eſta materia - 106

CAPITULO I.

DO movimento das aguas, que ſahem por quaiſquer orificios de vaſos conſtantemente cheios - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 113
Relaçaõ entre a velocidade do fluido dentro do vaſo, e a velocidade com que ſahe por qualquer orificio - 114
Determinaçaõ da velocidade com que ſahe qualquer fluido por hum orificio infinitamente pequeno - - 115
Da fluxaõ dos licores por orificios horizontais de qualquer grandeza - - - - - - - - - - - - - - - 118
— *por orificios verticais finitos* - - - - - - - - - 124
Problemas ſobre o deſaguamento de vaſos atraveſſados de muitos diaphragmas - - - - - - - - - - 129
— *Sobre a preſſaõ que os licores exercitaõ contra as paredes dos vaſos em movimento* - - - - - - 136
Effeito da fricçaõ no deſaguamento dos vaſos conſtantemente cheios - - - - - - - - - - - - - - - 141
Indagaçoens experimentais ſobre as materias precedentes - 144
Contracçaõ da veia fluida - - - - - - - - - - - - ibid.
Experiencias, e reflexoens ſobre o deſaguamento por orificios horizontais e verticais, abertos em paredes delgadas - - - - - - - - - - - - - - - - - - 146
— *por tubos addiccionais* - - - - - - - - - - - - 148
Soluçaõ das queſtoens principais deſta materia, deduzida unicamente da experiencia - - - - - - - - 152

CAPITULO II.

DO movimento das aguas, que ſahem pelos orificios de quaiſquer vaſos, até elles ſe eſgotarem - 155
Formulas geraes no caſo de ſerem os orificios infinitamente pequenos - - - - - - - - - - - - - - - - - 156
Exemplos - ibid.
Methodo geral para o caſo de ſerem os orificios horizontais de grandeza conſideravel - - - - - - - - 160
— *para o caſo dos orificios laterais, cujos pontos naõ podem julgar-ſe equidiſtantes da ſuperficie do fluido a cada inſtante* - - - - - - - - - - - - 163
Problemas relativos a eſta materia - - - - - - - - - 164
Comparaçaõ da theorica precedente com a experiencia 173

CAPITULO III.

DO movimento das aguas nas fontes de repuxo 175
Dos repuxos verticais - - - - - - - - - - - - - ibid.
Experiencias e reflexoens ſobre as alturas dos repuxos 176
Exemplos da applicaçaõ dos reſultados e regras precedentes á practica - - - - - - - - - - - - - - - - 182
Dos repuxos obliquos - - - - - - - - - - - - - - - 184
Experiencias, e reflexoens ſobre elles - - - - - - - - 187

CAPITULO IV.

DO movimento das aguas pelos tubos conductores - 189
Experiencias e reflexoens ſobre os conductores rectilineos horizontais - - - - - - - - - - - - - - - - - - ibid.
— *Sobre os verticais, ou inclinados* - - - - - - - 193
— *Sobre os curvilineos* - - - - - - - - - - - - - - 195
Applicaçaõ do reſultado das experiencias á practica 201
Da preſſaõ que a agua em movimento exercita contra as paredes dos conductores - - - - - - - - - - - 202

CAPITULO V.

DO movimento das aguas conduzidas por quaiſquer canais - - - - - - - - - - - - - 208
Experiencias e reflexoens ſobre a velocidade da agua em canais rectangulares - - - - - - - - - - - 209
— *Sendo os canais horizontais* - - - - - - - - - 210
— *Sendo declives* - - - - - - - - - - - - - - - 213
Reflexoens ſobre a conſtrucçaõ dos aqueductos - - - 219
Meios propoſtos por diverſos Autores para medir a velocidade das aguas correntes - - - - - - - - - 220

CAPITULO VI.

DO movimento dos rios - - - - - - - - - - - - 223
Conſideraçoens gerais ſobre o movimento dos rios - 224
Conſideraçoens phyſicas ſobre o modo com que os rios eſtabelecem as ſuas madres - - - - - - - - - - 231
Do movimento dos rios na ſua embocadura ; e da uniaõ, e ſeparaçaõ delles - - - - - - - - - - - 238

CAPITULO VII.

DA percuſſaõ dos fluidos - - - - - - - - - - 246
Theorica ordinaria da percuſſaõ dos fluidos - 247
Taboa das impulſoens da agua ſobre a ſuperficie de hum pé quadrado, ferida perpendicularmente - - 252
Exemplos da applicaçaõ da theorica precedente - - ibid.
Experiencias, e reflexoens ſobre a percuſſaõ dos fluidos - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 258
Idea geral das tentativas dos Geometras, para eſtabelecer huma theorica mais exacta - - - - - - 262

CAPITULO VIII.

DO melhor modo de empregar a acçaõ de hum fluido para mover huma maquina - - - - - - 266
Theorica das rodas movidas pela impulſaõ da agua 267
— *Sendo as rodas verticais* - - - - - - - - - - 268
— *Sendo horizontais* - - - - - - - - - - - - - 277
Experiencias, e reflexoens ſobre as rodas movidas pela impulſaõ da agua - - - - - - - - - - - - - 281
Das rodas movidas pelo pezo da agua; ou pelo pezo, e pela impulſaõ ao meſmo tempo - - - - - 288
Experiencias ſobre eſta eſpecie de rodas - - - - - - 293
Determinaçaõ geral dos effeitos das rodas de pennas 294

CAPITULO IX.

DO movimento de oſcillaçaõ, e undulaçaõ dos fluidos - 308
Applicaçaõ deſta theorica ao movimento das ondas 309
Determinaçaõ geral das oſcillaçoens de hum fluido em hum tubo de qualquer figura - - - - - - - - 310

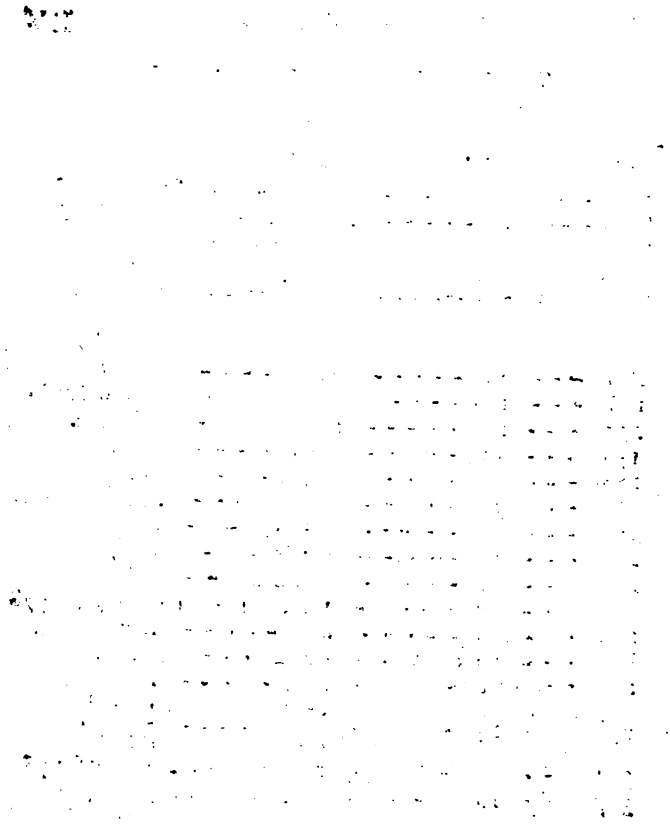
CAPITULO X.

DO movimento dos fluidos elaſticos - - - - - 314

ERRATAS.

Pag.	Linh.	Errat.	Emend.
14	18	cn	sen
82	4	12MNK	12$MNK.FG$
83	14	mnk	mnK
85	1 e 2	$-3y$	$-3x$
86	3	gravidaoe	gravidade
89	13	Λ	y
99	23	$AHBK$	$AHBP$
130	30	Adx	$-Adx$
138	1	ſobre fundo	ſobre o fundo
151	20	mais a agua	mais agua
156	12	Xdt	Xdx
160	12	213	313
163	7	$H=$	$=H$
170	11	Q^2	G^2
179	19	$D:D$	$D:D'$
185	11	$OK.2FO$	$OQ.2FO$
194	37	$\sqrt{2},\sqrt{3}$	$\sqrt{1,889}$ e $\sqrt{2,778}$
222	30	xy	Xx
ibid.	30 e 34	yXY	xXR
256	21	RA	RH
298	14	$\frac{cos\,m^2}{cos\,p^2}$	$\frac{cos\,m^3}{cos\,p^2}$
302	17	$2\,cos\,q\,sen\,q$	$2\,cos\,q\,sen\,q^3$
307	10	dM	$dM=$

TRA-



TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA.

DEFINIÇOENS, E NOÇOENS GERAIS.

I

A *HYDRODYNAMICA* em geral he a Sciencia, que tem por objecto as leis do Equilibrio, e do Movimento dos Fluidos. A parte della, que conſidera o equilibrio, chama-ſe *Hyaroſtatica*; e a que trata do movimento, *Hydraulica*.

2 *Fluido* he o corpo, que ſe compoem de moleculas tenuiſſimas, independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o ſentido. Tal he o vinho, a agua, o mercurio, o ar, a chama &c.

3 Neſta definiçaõ ſuppomos os fluidos perfeitamente tais; mas phyſicamente fallando naõ ha nenhum que o ſeja. Sempre as partes de qualquer delles ſe unem entre ſi com certo gráo de adherencia, e tenacidade, que naõ he a meſma em todos, e que no meſmo fluido póde variar, em raſaõ do frio, do calor, e de outras cauſas phyſicas.

4 Alguns autores diſtinguem os liquidos dos fluidos, como a eſpecie do genero. Chamaõ fluidos aquelles, cujas partes cedem facilmente ao tacto, e naõ ſaõ ligadas entre ſi, como a areia, a cinza &c. E por liquidos entendem ſomente aquelles, cujas partes tem taõ grande mobilidade, e ſe equilibraõ pelo ſeu pezo de tal maneira, que ſendo em quantidade ſufficiente ſe derramaõ, e formaõ ſempre huma ſuperficie horizontal. Neſte tratado naõ fallaremos dos fluidos improprios, como he a areia, mas ſomente dos fluidos perfeitos, que indifferentemente chamaremos fluidos, ou liquidos.

5 Como havemos de fallar muitas vezes em *maſſa*, *volume*, *denſidade* &c, em poucas palavras fixaremos aqui a idea, que ſe deve ter deſtas quantidades.

6 A *maſſa* de hum corpo, ou ſeja ſolido, ou fluido,

he a quantidade de materia propria, de que elle ſe compoem. Eſta ſe conhece pelo pezo; deſorte que ſe hum corpo péza o dobro, triplo &c de outro, diremos que tem huma maſſa dupla, tripla &c.

Eſta proporcionalidade dos pezos com as maſſas he demonſtrada pela experiencia. Porque no vacuo todos os corpos deſcem com igual velocidade, e pelos principios da Mechanica ſe ſabe, que quando as velocidades de dous moveis ſaõ iguais, as forças motrizes ſaõ neceſſariamente proporcionais ás maſſas.

7 O *volume* de hum corpo tanto ſolido, como fluido, he o eſpaço que elle occupa. Eſte ſe determina pelas regras que a Geometria eſtabelece para a mediçaõ dos corpos.

8 Se todos os corpos foſſem perfeitamente maſſiços, ou ſe todos foſſem igualmente poroſos, era inutil diſtinguir a maſſa do volume. Mas todos ſaõ poroſos, e cada hum de maneira differente. Duas barras, por exemplo, huma de ouro, outra de prata, ambas exactamente da meſma figura e volume, naõ pézaõ igualmente, mas ſaõ os ſeus pezos, e conſeguintemente as maſſas proximamente como 19 para 10. Do meſmo modo hum pé cubico de mercurio, e outro de agua, tem maſſas muito deſiguais; pois a primeira he 14 vezes maior que a ſegunda proximamente. Conforme pois contém hum corpo mais ou menos maſſa em hum volume dado, ſe chama mais ou menos *denſo*.

9 Daqui reſulta a noçaõ da *denſidade*, que ſe deve conſiderar como a relaçaõ do numero das *medidas* da maſſa ao numero das *medidas* do volume, ou (que vem a ſer o meſmo) como *a maſſa comprehendida na unidade do volume*.

As medidas da maſſa ſaõ *libras*, *onças* &c, e do volume *pés cubicos*, *pollegadas cubicas* &c. Em cada eſpecie deſtas medidas deve tomar-ſe huma unidade fundamental, como a onça, por exemplo, para as maſſas, e a pollegada cubica para os volumes.

10 Logo ſe duas maſſas M, m, tiverem os volumes V, v, e as denſidades D, d, ſerá $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, e conſeguintemente $M \cdot m :: VD : v\,d$. Donde ſe vê, que *as maſſas ſaõ na raſaõ compoſta dos volumes e das denſidades*.

11 *Quando as maſſas ſaõ iguais, ſaõ as denſidades na raſaõ inverſa dos volumes*; porque entaõ temos $VD = v\,d$, e conſeguintemente $D : d :: v : V$.

12 He

12 He facil de ver, que a denſidade he huma quantidade puramente relativa, e que hum corpo naõ ſe chama denſo ſenaõ pela comparaçaõ expreſſa, ou ſubentendida, que delle ſe faz com outro corpo. Aſſim deve entender-ſe que eſtes enunciados commumente recebidos, *a denſidade he igual ao quociente da maſſa dividida pelo volume*, e *a maſſa he igual ao volume multiplicado pela denſidade* ſe reduzem ás proporçõẽs que havemos referido.

13 Quando ſe conſidera o pezo de hum corpo ſimpleſmente, ſem attençaõ alguma ao ſeu volume, chama-ſe pezo abſoluto, ou gravidade abſoluta do meſmo corpo.

14 Mas muitas vezes he neceſſario conhecer o pezo de huma materia comprehendida em hum volume dado. Eſte pezo he o que ſe chama *gravidade eſpecifica*. Donde ſe vê em geral, que o pezo eſpecifico de hum corpo he a relaçaõ entre o numero das medidas do pezo abſoluto, e o numero das medidas do volume, ou (que vem a ſer o meſmo) *o pezo comprehendido na unidade do volume*.

15 Sendo pois dous corpos, que tenhaõ os volumes V, v, os pezos abſolutos P, p, e as gravidades eſpecificas G, g, teremos $G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e conſeguintemente $P : p :: GV : gv$, iſto he, *os pezos abſolutos ſeraõ entre ſi na raſaõ compoſta dos volumes, e das gravidades eſpecificas.*

16 *Se os pezos forem iguais, as gravidades eſpecificas ſeraõ na raſaõ inverſa dos volumes*; porque entaõ he $GV = gv$, e conſeguintemente $G : g :: v : V$.

17 Daqui ſe entenderá o ſentido de huma expreſſaõ, de que havemos de uſar muitas vezes. Havendo de repreſentar o pezo de hum corpo de volume conhecido, ou determinavel pelas condições de qualquer problema, reduziremos eſte volume a medidas conhecidas, por exemplo, a pés cubicos, e multiplicallo-hemos pelo pezo abſoluto de hum pé cubico da meſma materia (pezo, que conſideraremos como a ſua gravidade eſpecifica). Eſte producto dará evidentemente o pezo abſoluto do corpo; e neſte ſentido diremos, que *o pezo abſoluto he igual ao producto do volume multiplicado pela gravidade eſpecifica.*

18 Como as maſſas ſaõ proporcionais aos pezos, eſtá claro que as denſidades ſaõ proporcionais ás gravidades eſpecificas; porque as denſidades ſaõ as maſſas comprehen-

didas em volumes iguais, e as gravidades eſpecificas ſão os pezos comprehendidos tambem em volumes iguais.

19 Em tudo iſto ſuppomos, que os dous corpos, que ſe compáraõ, eſtaõ na meſma latitude, ou ao menos no meſmo parallelo. Se a maſſa M eſtiveſſe no pólo, e m no equador, ſeria neceſſario fazer algumas mudanças nos reſultados precedentes, reflectindo que a força centrifuga, que naſce da rotaçaõ do globo terreſtre, faz os corpos $\frac{1}{288}$ menos pezados no equador do que nos pólos; e conſeguintemente naõ ſerá $M : m :: P : p$, mas $M : m :: P : p + \frac{p}{288}$ proximamente.

Do meſmo modo ſendo D, d as denſidades das maſſas M, m, e G, g as ſuas gravidades eſpecificas tomadas huma no pólo e a outra no equador, iſto he, os pezos reſpectivos de volumes iguais nos ditos lugares, teremos $D : d :: G : g + \frac{g}{288}$.

20 Daqui ſe entenderá a cautela, que deve haver em naõ confundir a inercia, iſto he, a reſiſtencia que os corpos oppoem á ſua mudança de eſtado, ou ſeja de quietaçaõ, ou de movimento, com a força da gravidade. A força de inercia he huma propriedade eſſencial á materia, cujo effeito ſe naõ póde ſuſpender, nem alterar por meio algum; e a força da gravidade póde variar como temos viſto, e ainda deſtruir-ſe inteiramente o ſeu effeito. He verdade, que ambas ſaõ proporcionais ás maſſas; mas a proporcionalidade da inercia com a maſſa he neceſſariamente verdadeira, e independente do lugar onde os corpos eſtaõ ſituados, e a proporcionalidade do pezo com a maſſa he de huma verdade puramente experimental, que póde naõ ſer a meſma em differentes lugares, e circunſtancias.

Tais ſaõ as noçõeſ gerais, com que os noſſos Leitores ſe devem familiarizar. Naõ referimos aqui muitas propoſições gerais ſobre o equilibrio, e movimento, das quais havemos de uſar; porque as tomaremos da Mechanica, ou as demonſtraremos em ſeu lugar, ſe for neceſſario.

PRI-

PRIMEIRA PARTE,
OU
ELEMENTOS
DE
HYDROSTATICA.

21 A *Hydroſtatica*, como já diſſemos, tem por objecto as leis do equilibrio dos fluidos. Eſte equilibrio he produzido pela mutua oppoſiçaõ, e deſtruiçaõ das forças, que obraõ ou ſobre as partes meſmas dos fluidos, ou ſobre as paredes dos vaſos em que ſe contém, ou ſobre os corpos ſolidos mergulhados nelles. O exame de todos eſtes caſos ſerá a materia deſta Primeira Parte; e ſupporemos, que os fluidos ſaõ homogeneos, iſto he, que ſaõ compoſtos, em toda a ſua extenſaõ, de partes elementares ſemelhantes, e igualmente pezadas.

22 Os fluidos, em géral, podem dividir-ſe em duas eſpecies. A primeira he dos fluidos incompreſſiveis, como a agua, o vinho &c; e a ſegunda dos elaſticos, como o ar, a chama, o vapor da agua &c.

Sem examinar, ſe as experiencias pelas quais ſe eſtabelece a incompreſſibilidade, ou elaſticidade dos fluidos, ſaõ exactas ou naõ, obſervaremos que a natureza naõ poem limites perfeitamente determinados entre as differentes claſſes dos corpos. Ella naõ faz corpos perfeitamente duros, nem perfeitamente elaſticos; mas he muito ventajoſo eſtabelecer eſtas diſtinções, para deſcobrir com mais facilidade e clareza as propriedades, que dependem da incompreſſibilidade e elaſticidade, as quais na pratica ſe applicaráõ, como approximações mais ou menos exactas, conforme os corpos ſe chegarem mais ou menos para qualquer deſtas claſſes.

PRIN-

PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Do Equilibrio dos Fluidos.

23 *QUando huma maſſa fluida eſtá em equilibrio, quaiſquer que ſejaõ as forças que ſollicitaõ as moleculas de que ella ſe compoem, cada particula recebe huma preſſaõ igual de todas as partes.*

Porque ſendo todas as particulas independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o ſentido, eſtá claro, que ſe qualquer dellas foſſe menos comprimida de huma parte que da outra, deveria neceſſariamente moverſe para a parte da menor preſſaõ, e naõ haveria equilibrio no ſyſtema, contra a ſuppoſiçaõ.

Éſte principio he por outra parte demonſtrado pela experiencia; porque ſe em igual profundidade de hum fluido incluido em hum vaſo, ſe fizer nas paredes huma abertura, á qual ſe applique huma tampa que embarace a ſahida do fluido, a tampa ſerá impellida por elle com a meſma força, quer ſeja horizontal a abertura, quer inclinada de qualquer maneira ao horizonte.

Attendida a adherencia reciproca, ou tenacidade das particulas, póde ſucceder phyſicamente, que ſubſiſta o equilibrio, ainda que algumas dellas naõ ſejaõ carregadas igualmente de todas as partes. Mas eſta deſigualdade de preſſaõ naõ póde ſer, ſenaõ muito pequena; e o principio he rigoroſamente verdadeiro nos fluidos perfeitos, como nós os conſideramos aqui.

24 Reciprocamente eſtá claro, que *tendo cada particula igual preſſaõ de todas as partes, todo o ſyſtema deve eſtar em equilibrio.*

As leis particulares do equilibrio dos fluidos tanto incompreſſiveis, como elaſticos, dependem deſte principio geral, que acabamos de expôr. Podiamos deduzillas juntamente; mas para maior clareza conſideraremos primeiro o equilibrio dos fluidos incompreſſiveis, e depois o dos elaſticos.

CAPI-

CAPITULO I.

Do Equilibrio dos fluidos incompreſſiveis.

25 HE eſcuſado definir em fórma os fluidos incompreſſiveis. Pela meſma palavra ſe entende, que huma quantidade determinada de hum fluido deſta eſpecie ocupa ſempre o meſmo eſpaço, naõ ſendo ſuſceptivel de contracçaõ, nem de expanſaõ.

26 Os vaſos, em que os licores ſe contém, podem ſer ſolidos, ou flexiveis, iſto hé, podem ſer tais que conſtantemente conſervem a meſma figura pela firmeza e reſiſtencia das paredes, ou indifferentes para tomarem a figura, que convem ao equilibrio das forças, que obraõ ſobre o fluido. Quando diſſermos *vaſo*, ſempre entenderemos ſolido, ſe expreſſamente naõ ajuntarmos *flexivel*, ou ſe pelo ſentido do diſcurſo naõ conſtar que tratamos de hum vaſo deſſa condiçaõ.

27 Se a todos os elementos iguais *A*, *B*, *C* &c (Fig. 1.) da ſuperficie de huma maſſa fluida naõ pezada ſe applicarem perpendicularmente potencias iguais *P*, *Q*, *R* &c, he evidente que eſtas ficaraõ em equilibrio. Porque communicando todas livremente a ſua acçaõ, e da meſma maneira a huma maſſa incompreſſivel, cujas partes ſaõ perfeitamente moveis para todas as partes, naõ ha raſaõ para que huma vença a outra.

28 O meſmo deve ſucceder, ſendo os elementos *A*, *B*, *C* &c deſiguais, mas reſpectivamente proporcionais ás potencias *P*, *Q*, *R* &c nelles applicadas. Porque ſendo qualquer dos elementos *B*, *C* &c duplo, triplo, ou geralmente hum multiplo *n* do elemento *A*, poderemos conſiderar qualquer das potencias reſpectivas *Q*, *R* &c, como compoſta de duas, tres, ou geralmente de *n* potencias iguais a *P*, e applicadas cada huma a cada huma das partes dos elementos *B*, *C* &c iguais a *A*, e ſeremos reduzidos ao caſo precedente.

29 Como a perfeita mobilidade das particulas communica livremente a acçaõ das potencias *P*, *Q*, *R* &c a todos os pontos da maſſa, eſtá claro que huma molecula *m*, em qualquer lugar que eſteja, ſentirá a meſma preſſaõ, como ſe eſtiveſſe na ſuperficie, fazendo parte do elemento

to *A*. Conſiderando-a pois tambem como huma pequena maſſa fluida, deve ter huma preſſaõ igual e perpendicular a cada hum dos pontos da ſua ſuperficie, para eſtar em equilibrio. Aſſim imaginando a ſua ſuperficie dividida em partes iguais, e ſuppondo que cada huma dellas he para o elemento *A* como q para r, ſerá a preſſaõ de qualquer deſtas partes repreſentada por $\frac{q}{r} P$.

30 Supponhamos qualquer licor naõ pezado, e metido em hum vaſo *A B C D* fechado de todas as partes (Fig. 2.). Se lhe fizermos qualquer abertura *X*, e nella applicarmos a potencia *P*, eſtá claro que concebendo as paredes do vaſo divididas em certo numero de elementos, cada hum dos quais tenha com a abertura *X* huma raſaõ dada, a preſſaõ de cada hum eſtará com a potencia *P* na meſma raſaõ; porque as paredes do vaſo com a ſua reſiſtencia fazem as vezes das potencias *Q*, *R*, *S* &c (Fig. 1.).

31 Do meſmo modo, ſe no vaſo *A B C D* (Fig. 3.) fizermos qualquer numero de aberturas *X*, *M*, *N*, ás quais ſe appliquem as potencias *P*, *Q*, *R*, de maneira que ſeja $P : Q : R :: X : M : N$, eſtas potencias eſtaráõ em equilibrio (n. 28.). E ſe for $\frac{q}{r}$ a raſaõ de huma parte da ſuperficie de huma molecula *m* (Fig. 2, e 3.) comparada com a abertura *X*, a preſſaõ deſta parte ſerá repreſentada por $\frac{q}{r} P$ (n. 29.).

32 Examinemos agora, que ſuperficie deve tomar hum licor em equilibrio no vaſo *A M N E* (Fig. 4.), ſendo deixado á acçaõ livre da gravidade. Supponhamos por hum momento, que he a ſuperficie curva *A B D E*, e tomemos nella qualquer particula *B*. Reſolvendo a ſua gravidade *Bf* em outras duas forças *Bt*, *Bg* na direcçaõ dos elementos contiguos da curva, ſerá neceſſario para haver equilibrio, que eſtas forças *Bt*, *Bg* ſejaõ iguais ás forças, que as particulas veſinhas exercitaõ contra a particula *B*, pelas direcções oppoſtas *tB*, *gB*. Por outra parte, naõ póde a particula *B* eſtar em equilibrio, ſem receber huma preſſaõ igual de todos os lados. Logo as forças *Bt*, *Bg* devem ſer iguais, e conſeguintemente o angulo *tBg* formado pelos

pelos dous elementos *Bt*, *Bg* da curva deve ſer dividido em partes iguais pela direcçaõ da gravidade. E como iſto deve ter lugar em todos os pontos da ſuperficie, he neceſſario que eſta ſejá horizontal, ou perpendicular á direcçaõ da gravidade. E em geral, *quaiſquer que ſejaõ as forças que ſollicitaõ as partes de hum fluido, ſempre a ſuperficie delle deverá cortar perpendicularmente as direcções das forças, que immediatamente actuaõ ſobre ella.*

33 Eſta propoſiçaõ he igualmente verdadeira, ainda que o licor ſe contenha em hum vaſo flexivel; porque aſſim que elle houver tomado a figura, que requer o equilibrio das forças applicadas ao fluido, naõ ha couſa que embarace o conſiderallo como ſolido, e terá lugar a meſma demonſtraçaõ.

34 Como as direcções da gravidade ſaõ ſenſivelmente parallelas, ſendo tomadas em pouca diſtancia, eſtá claro que a ſuperficie de hum licor em hum vaſo, em hum tanque &c, póde ſem erro algum ſenſivel tomar-ſe como huma ſuperficie plana. Se for porém de conſideravel extenſaõ, deverá tomar-ſe como parte de huma ſuperficie eſferica, ou eſferoidica, conforme ſe conſiderar o globo terreſtre como huma eſfera, ou como hum eſferoide.

35 Formando pois a ſuperficie *A E* hum plano horizontal (Fig. 5.), ſupponhamos que qualquer porçaõ *B C D* do fluido ſe congela, ou endurece, ſem mudar de lugar nem de volume. He evidente, que com iſſo naõ ſe altéra em nada o equilibrio do reſto do fluido; e por conſeguinte, que as ſuperficies parciais *A B*, *D E* ficaráõ ſempre no meſmo plano horizontal. Logo, ſe em hum tubo encurvado *K M O* (Fig. 6.) ſe lançar qualquer licor, depois de ſe pôr em equilibrio eſtaraõ ſempre de livel as ſuperficies *A B*, *D E*; porque naõ ha couſa que embarace o conſiderar o licor nelle contido, como a porçaõ do fluido *A B C D E M* (Fig. 5.). E em geral, *Se dous quaiſquer vaſos ſe communicarem entre ſi de qualquer maneira, os licores da meſma eſpecie, que nelles eſtiverem, ſe poraõ ſempre ao livel.*

Daqui ſe entenderá a raſaõ, porque a agua dos poços, que ſe abrem ás margens de hum rio ſe poem ao livel delle; porque a agua filtra pela terra, e eſtabelece canais ſubterraneos de communicaçaõ entre o rio, e os poços.

36 He

36 He de advertir, que a propoſiçaõ precedente tem huma excepçaõ no eſtado phyſico dos fluidos. Quando hum de dous tubos communicantes tem hum diametro muito pequeno, ſendo o do outro muito mais conſideravel, naõ ſe poem os licores de livel. Mas a agua, o vinho, o azeite, e a maior parte delles ſobem a maior altura no tubo capillar do que no outro, e o azougue pelo contrario fica mais a baixo.

Eſte phenomeno ſingular tem dado muito que fazer aos Phyſicos; mas nenhum dos ſyſtemas, que ſe tem imaginado para dar a raſaõ, ſatisfaz perfeitamente. Naõ me detenho pois em os expôr, ſendo principalmente o meu objecto dar a Theorica Mathematica do equilibrio dos fluidos conſiderados no eſtado de fluideza perfeita, preſcindindo de todas as cauſas phyſicas e exteriores, que podem alterar as conſequencias, que reſultaõ deſta hypotheſe.

37 Sendo igualmente comprimida de todas as partes huma particula *m* (Fig. 7.) de hum fluido em equilibrio, ſujeito unicamente á acçaõ da gravidade, ſupponhamos que a maſſa inteira do fluido, ſe torna ſolida, exceptuando ſomente a columna *o m*. He manifeſto, que a particula *m* ficará ſempre no meſmo eſtado de compreſſaõ. Mas quando he ſomente fluida a columna *o m*, he evidente que a particula *m* ſuſtenta o pezo inteiro della; logo a medida da preſſaõ, que padece a meſma particula em todos os caſos, he o pezo abſoluto da columna *o m* que verticalmente inſiſte ſobre ella.

38 Imaginemos, que huma curva qualquer *FmQSH* (Fig. 8.) toca a particula *m* da banda da parede *AM*, e que ſe tornaõ ſolidas as porçoẽs do fluido *AFmQm*, *EHSN*, ſem mudar de lugar nem de volume; igualmente he manifeſto, que a particula *m* ficará no meſmo eſtado de compreſſaõ. Logo em qualquer vaſo *FQSH* (Fig. 9.) qualquer ponto *m* das ſuas paredes he comprimido pelo fluido com huma força igual ao pezo abſoluto do pequeno fio vertical *o m* terminado na ſuperficie do fluido, produzida ſe for neceſſario; parque póde o licor do vaſo *FQSH* (Fig. 9) conſiderar-ſe como a porçaõ fluida *FQSH* (Fig. 8.), ſuppondo que as porçoẽs *AFmQM*, *EHSN* ambas ſe tornáraõ ſolidas.

39 Donde ſe ſegue, que a preſſaõ de qualquer parte infinitamente pequena *my* das paredes do vaſo *FGSH* (Fig.

(Fig. 9.) he na raſaõ compoſta do numero das moleculas que a cobrem e da altura vertical om, que póde ſuppor-ſe a meſma para todos os pontos do elemento my. Aſſim deſignando por p o pezo eſpecifico do fluido, ſerá a preſſaõ do elemento my repreſentada por $p.om.my$ (n. 17.).

40 Supponha-ſe agora (Fig. 10.) a ſuperficie finita $fnr = S$, e qualquer altura $ft = y$; e teremos por formula da preſſaõ $p\int y\,dS$. Porém, ſendo G o centro de gravidade da ſuperficie fr, conſta da Statica que $\frac{\int y\,dS}{S} = GO$. Logo $p\int y\,dS = p.S.GO$. Logo *a preſſaõ que padece qualquer parte da ſuperficie de hum vaſo em virtude da acçaõ de qualquer licor em equilibrio, e ſujeito unicamente á força da gravidade, he igual ao pezo abſoluto de huma columna do meſmo fluido, que tenha por baſe a meſma parte do vaſo convertida em ſuperficie plana, ſe for neceſſario, e por altura a vertical conduzida do ſeu centro de gravidade para a ſuperficie horizontal do fluido.*

41 Daqui ſe infere, que *as preſſoens das baſes planas de quaiſquer vaſos, cheios de hum meſmo liquido, ſaõ entre ſi na raſaõ compoſta das ditas baſes e das alturas do liquido.* E por conſeguinte, ſe quaiſquer vaſos (Fig. 11. 12. e 13.) tiverem os fundos iguais, e ſuſtentarem columnas igualmente altas do meſmo fluido, receberáõ nellas preſſoens iguais.

42 Aſſim póde ſucceder, que a preſſaõ do fundo de hum vaſo, e o pezo do fluido nelle contido ſejaõ muito differentes. No vaſo cylindrico da Fig. 11, a preſſaõ do fundo he igual ao pezo total do liquido; mas no vaſo conico da Fig. 12, he menor; e no da Fig. 13, maior.

Quando ſe trata de levantar verticalmente hum vaſo cheio de agua, ou de o ſuſtentar em hum plano inclinado, naõ deve attender-ſe á preſſaõ que o fluido faz contra as paredes delle, mas ao pezo total do vaſo e do fluido nelle contido, como ſe tudo foſſe huma maſſa ſolida. Por muito facil que ſeja eſta reflexaõ, julguei neceſſario fazella aqui, porque o Autor de huma Obra muito eſpalhada ſe enganou groſſeiramente neſte ponto.

43 Seja por exemplo, AM a *adufa* ou *comporta* rectangular e vertical de hum *caneiro*, ou de hum *dique* (Fig.

(Fig. 14.), a qual ſuſtenta a preſſaõ da maſſa de aguas eſtagnadas AMO, cuja extenſaõ horizontal MO póde ſer grande ou pequena como ſe quizer, porque iſſo he abſolutamente indifferente em quanto ao effeito da preſſaõ. Seja G o meio, ou o centro de gravidade do rectangulo, e A o ſeu lado horizontal; e teremos a quantidade da preſſaõ que elle ſuſtenta $p.A.AM.GM = p.A.\frac{AM^2}{2}$.

Se $A = 3$ pés, e $AM = 12$ pés, teremos $\frac{1}{2} A.AM^2 = 216$ pés cubicos; e porque hum pé cubico de agua doce péza 70 libras proximamente, ſerá a preſſaõ, que buſcamos, $\frac{1}{2} p.A.AM^2 = 15120$ libras.

Com a meſma facilidade ſe determinaria a preſſaõ, no caſo de naõ ſer a adufa vertical, ou de ter qualquer outra figura que naõ foſſe a rectangular.

44 Se ſobre a ſuperficie horizontal AE de hum licor $AMNE$ (Fig. 15.), ſe puzer huma tampa movediça, carregada no meio com hum pezo Q, e ſe em qualquer lugar das paredes do vaſo ſe fizer huma abertura fr, á qual ſe applique huma pequena tampa, ou hum embolo, para ter maõ no fluido; eſtá claro 1°, que a preſſaõ do pezo Q ſe póde conſiderar como dividida em huma infinidade de potencias, que comprimem perpendicularmente a ſuperficie AE, e diſtribuem a ſua acçaõ a todos os pontos do fluido, donde reſultará na ſuperficie fr huma preſſaõ repreſentada por $\frac{fr}{AE} Q$ (n.28.). 2°, que em virtude da gravidade do fluido a ſuperficie fr ſerá além diſſo comprimida perpendicularmente com huma força igual ao pezo de huma columna do meſmo fluido, que tenha fr por baſe, e por altura a diſtancia GE do centro de gravidade de fr até o livel do fluido (n. 40.). Aſſim deſignando eſta força por R, deverá ſer a potencia applicada ao embolo para ter maõ no licor $P = \frac{fr}{AE} Q + R$.

45 Supponhamos hum vaſo fechado de todas as partes $AMNE$ (Fig. 16.), cheio de hum licor pezado. Eſtando

ão a tampa ſuperior horizontal, ſe nella fizermos as aberturas $f r$, $g t$, e lhes applicarmos os pezos P, Q, de maneira que ſeja $P : Q :: f r : g t$, eſtes dous pezos eſtarão em equilibrio (n. 31.); porque obrão do meſmo modo tanto na ſuperficie como no interior do fluido, ſem haver embaraço algum da parte da gravidade propria delle.

46 Agora em lugar de applicarmos os pezos P; Q ás aberturas $f r$, $g t$, ſupponhamos que eſtas ſervem de baſes a duas colunnas $f x y r$, $g z u t$ de licores differentes (Fig. 17.), cujas gravidades eſpecificas ſejaõ P, p. Levantando dos centros de gravidade das baſes para o livel dos licores as verticais $G O$, $T S$, ſerá a preſſaõ do licor $f x y r$ ſobre a baſe $f r$ repreſentada por $P . f r . G O$, e a do licor $g z u t$ ſobre a baſe $g t$ por $p . g t . T S$. Logo para haver equilibrio deverá ſer $P . f r . G O : p . g t . T S :: f r : g t$, e conſeguintemente $P . G O = p . T S$. Donde concluiremos, que as *alturas de quaiſquer licores equilibrados em vaſos communicantes ſaõ na raſaõ inverſa das ſuas gravidades eſpecificas.*

Por exemplo, ſe a columna $f x y r$ for de agua, e $g z u t$ de mercurio, ſerá $G O : T S :: 14 : 1$. O mercurio he compreſſivel, e dilatavel pelo frio, e calor; mas aqui preſcindimos deſta qualidade, e tomamos a ſua gravidade eſpecifica que correſponde ao ar temperado, e que tem o meio entre as outras.

47 Para determinarmos agora as condiçoens gerais, que devem ter lugar, para que hum fluido ſe ponha em equilibrio pelo proprio pezo em hum vaſo flexivel, pezado, e inextenſivel, conſideremos huma ſecçaõ vertical *AMNOPB* da figura, que o vaſo ha de tomar (Fig. 18.), e ſejaõ $M N$, $N O$, $O P$ tres elementos da curva conſecutivos, e iguais entre ſi. Eſtando o fluido em equilibrio, e havendo tomado o vaſo a figura competente, podemos ſuppor os pontos M, P como fixos, e preſcindindo do reſto da curva conſiderar $M N O P$ como hum polygono funicular atado aos dous pontos fixos M, P, ſendo applicadas a cada hum dos angulos N, O duas forças, huma vertical $N S$, ou $O s$, que repreſenta o pezo do elemento MN, ou ON, e a outra $N R$, ou $O r$, que repreſenta a preſſaõ do fluido, a qual como he ſempre perpendicular á curva deve dividir em duas partes iguais o angulo $M N O$, ou $N O P$ formado por dous elementos contiguos. Das duas forças NS,

NS, NR applicadas ao angulo N reſulta a força unica NQ, e combinando a força NQ com a tenſaõ NV do cordaõ MN deverá reſultar huma força NT na direcçaõ de ON. Do meſmo modo reſultará das forças applicadas ao angulo O huma força unica Ot na direcçaõ de NQ.

Iſto poſto, he evidente, que para haver equilibrio he neceſſario que as forças NT, Ot directamente oppoſtas, ſejaõ iguais. Aſſim naõ falta mais que achar as expreſſoens dellas, e igualallas entre ſi.

Tirando pois do ponto Q para NS a perpendicular QE, teremos $EQ = SQ\,ſen\,ESQ = NR\,ſen\,RNS$, $SE = NR$, $cof\,RNS$, $NE = NS + NR\,.\,cof\,RNS$, $ſen\,ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR\,.\,ſen\,RNS}{NQ}$, $cof\,ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS + NR.cof\,RNS}{NQ}$, $ſen\,TQN = ſen\,(MNG + ENQ) = ſen\,MNG\,.\,cof\,ENQ + cof\,MNG\,.\,ſen\,ENQ = \frac{ſen\,MNG\,(NS + NR.cof\,RNS)}{NQ} + \frac{cof\,MNG.NR.ſen\,RNS}{NQ}$. Mas $TN = \frac{NQ\,.\,ſen\,TQN}{ſen\,MNT}$; logo pondo neſta equaçaõ o valor de $ſen\,TQN$, teremos $TN = \frac{ſen\,MNG\,(NS + NR.cof\,RNS)}{ſen\,MNT} + \frac{cof\,MNG.NR.ſen\,RNS}{ſen\,MNT} = \frac{NS\,.\,ſen\,MNG + NR\,ſen\,(MNG + RNS)}{ſen\,MNT} = \frac{NS\,.\,ſen\,MNG + NR}{ſen\,MNT}$, por ſer $MNG + RNS = MNZ$ = a hum angulo recto. Do meſmo modo acharemos $Ot = \frac{Os\,.\,ſen\,POI + Or}{ſen\,POt}$. Logo teremos por condiçaõ do equilibrio a equaçaõ ſeguinte

$$\frac{NS\,.\,ſen\,MNG + NR}{ſen\,MNT} = \frac{Os\,.\,ſen\,POI + Or}{ſen\,POt}.$$

48 Tomando pois o eixo horizontal AB, e conduzindo as ordenadas MH, NH', OH'', ſeja $AH = x$, $AH' = x'$

$= x'$, $AH'' = x''$, $HM = y$, $H'N = y'$, $H''O = y''$, o elemento $MN = ds$ (que he conſtante pela conſtrucçaõ), o raio oſculador no ponto $N = R$, e no ponto $O = R'$. Seja tambem a area da ſecçaõ perpendicular á corda conſiderada como cylindrica $= a^2$, a largura da ſuperficie na qual ſe exercita a preſſaõ do fluido $= b$, e a força da gravidade $= g$. Aſſim teremos $NR = g \cdot by' ds$, $NS = g \cdot a^2 ds$, $Or = g \cdot by'' ds$, $Os = g \cdot a^2 ds$, $sen\ MNG = \frac{dx}{ds}$, $sen\ MNT = \frac{ds}{R}$, $sen\ POI = \frac{dx''}{ds}$, $sen\ POt = \frac{ds}{R'}$; e ſubſtituindo eſtes valores, a equaçaõ precedente ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$\frac{R(gby' ds + ga^2 dx)}{ds} = \frac{R'(gby'' ds + ga^2 dx'')}{ds}.$$

Porém $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx) = dx + 2ddx + d^3x$, $y' = y + dy$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$, $R' = R + dR$. Logo omittindo os termos que ſe deſtroem, e deſprezando os infinitamente pequenos da terceira ordem, teremos $2a^2 R\,ddx + a^2 dR\,dx + bRdyds + bydRds = 0$, ou $a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + by\,dRds = -a^2 R\,ddx$, ou (metèndo no ſegundo membro em lugar de R o ſeu valor $\frac{ds\,dy}{ddx}$), $a^2 R\,ddx + a^2 dR\,dx + bRdyds + by\,dR\,ds = -a^2 ds\,dy$, cujo integral he $a^2 R\,dx + by\,Rds = A\,ds - a^2 y\,ds$. Agora eliminando R, teremos $a^2 dxdyds + a^2 ydsddx = Adsddx - by\,dy\,ds^2$, cujo integral he $a^2 y\,dx\,ds = B\,ds^2 + Adx\,ds - \frac{1}{2} by^2 ds^2$, donde finalmente ſe tira a equaçaõ differencial da curva

$$dx = \frac{(2B - by^2)\,dy}{\sqrt{[(2a^2 y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}}.$$

Eſta equaçaõ ſe integra em geral pelas quadraturas, e a integraçaõ introduzirá huma terceira conſtante C. Para a determinaçaõ dellas obſervaremos: 1°, que $y = 0$ dá, ou póde ſempre dar $x = 0$, porque podemos ſuppor a origem da curva onde quizermos. 2°, que os pontos extremos

tremos A e B ſaõ dados de poſiçaõ. 3°, que o comprimento da corda AMB he dado, ou que a curva faz em A com o eixo AB hum angulo dado, ou que ſatisfaz a outra qualquer condiçaõ equivalente.

49 Supponhamos que $A = o$, e $B = o$. Neſte caſo acharemos $x = C \pm \sqrt{\left(\frac{4a^4}{b^2} - yy\right)}$, equaçaõ que pertence ao circulo.

Sendo $a^2 = o$, ou ſuppondo que a curva AMB naõ tem pezo algum, ſerá $x = C + \int \frac{(B - y^2)\,dy}{\sqrt{\lfloor 4A^2 - (B - y^2)^2 \rfloor}}$, que he a equaçaõ da *Lintearia* commua.

E ſendo $b = o$, ou ſuppondo que o liquido naõ he pezado, ſerá $x = C + \int \frac{B\,dy}{\sqrt{\lfloor (y - A)^2 - B^2 \rfloor}}$, que he a equaçaõ da *Catenaria*.

50 Conſiderando agora huma ſecçaõ horizontal do vaſo flexivel (Fig. 19.), he evidente que as forças NS, Os ſaõ nullas (Fig. 18.), e que y', y'' ou as alturas do fluido ſaõ todas iguais. Aſſim teremos $R' = R$, ou $dR = o$, e conſeguintemente a figura de qualquer curva horizontal, comprimida lateralmente por hum fluido ſerá ſempre circular. Donde concluiremos, que enchendo-ſe de licor hum vaſo priſmatico vertical, cujas paredes ſejaõ perfeitamente flexiveis, deverá tomar a figura de hum cylindro recto.

51 Na meſma ſecçaõ horizontal (Fig. 19.), eſtá claro que a força NT exprime a tenſaõ do elemento NO, e NR a preſſaõ do fluido. Porém $NT = gby'R$, $NR = gby'ds$, e $\int NR = gby's$; logo $\int NR : NT :: s : R$, iſto he, ſerá a preſſaõ total que o fluido exercita contra a circumferencia $AMNOP$ para a tenſaõ della em qualquer dos ſeus pontos, como a meſma circumferencia para o raio CN.

52 Sejaõ $ABCD$, $abcd$ (Fig. 20. e 21.) dous cylindros rectos, ou inclinados, os quais porém tenhaõ as baſes horizontais, cheios de dous licores differentes, cujas gravidades eſpecificas ſejaõ P, p, e as alturas dos licores AB, ab. As preſſoens, que os fluidos faraõ contra as circumferencias das baſes $BMNC$, $bmnc$ ſeraõ repreſen-

preſentadas por $P.AB.BMNC$, e $p.ab.bmnc$ (n. 37). Logo, ſendo F, f as tenſoens das duas circumferencias, teremos $P.AB.BMNC : F :: BMNC : BH$, e $F = P.AB.BH$. Do meſmo modo no outro cylindro acharemos $f = p.ab.bb$; logo ſerá $F : f :: P.AB.BH : p.ab.bb$, iſto he, *as tenſoens das duas circumferencias ſeraõ entre ſi na raſaõ compoſta das alturas dos licores, das ſuas gravidades eſpecificas, e dos raios das meſmas circumferencias.*

53 Suppondo que as duas curvas $BSERKM$, $bserkm$ (Fig. 22. e 23.) ſaõ os aneis elementares dos dous cylindros, imaginemos que elles ſe compoem de huma infinidade de filetes circulares $XYVZ$, $xyvz$. He evidente que as reſiſtencias, que os tubos oppoem á ruptura, ſegundo as eſpeſſuras BS, bs, ſaõ na raſaõ compoſta do numero dos filetes, e da tenacidade da materia de que elles ſaõ formados. Aſſim chamando as reſiſtencias R, r, as eſpeſſuras E, e, as tenacidades T, t, teremos $R : r :: ET : et$. Porém para haver equilibrio, devem as reſiſtencias ſer iguais ás forças F, f; logo, repreſentando por H, h as alturas dos licores, e por D, d os diametros das baſes dos dous cylindros, teremos $ET : et :: \frac{P.HD}{2} : \frac{p.bd}{2}$, e conſeguintemente $E : e :: \frac{P.HD}{T} : \frac{p.bd}{t}$, iſto he, *ſeraõ as eſpeſſuras dos cylindros na raſaõ compoſta da directa das gravidades eſpecificas dos licores, das ſuas alturas, dos diametros dos cylindros, e da inverſa das tenacidades das materias de que forem feitos.*

54 Daqui ſe vê, que conheçendo as tenacidades das differentes materias, de que os tubos ſe fazem, e ſabendo por huma experiencia immediata a eſpeſſura que deve ter hum tubo dado para reſiſtir ao pezo de hum fluido dado, por huma ſimples proporçaõ ſe póde determinar a eſpeſſura de qualquer outro tubo. Ha muitos meios de examinar as tenacidades de qualquer materia. O mais ſimples he buſcar o pezo que baſta para quebrar hum fio deſſa materia de groſſura dada. M. Mariotte fez ſobre eſte ponto algumas experiencias, que ſe podem ver no ſeu *Tratado do movimento das aguas.*

Exemplo I. *Determinar a eſpeſſura de hum tubo de chumbo*

bo de 6 pollegadas de diametro, que ha de ſuſtentar o eſforço de huma columna de agoa de 100 pés de altura.

Conforme huma experiencia de *M.* Parent, hum tubo de chumbo de 12 pollegadas de diametro deve ter 6 linhas de eſpeſſura para ſuſtentar verticalmente huma colunna de agua de 60 pés de altura, ſem arrebentar. Aſſim chamando x a eſpeſſura procurada, teremos $60.12 : 100.6 :: 6 \text{ linh.} : x = 5$ linhas.

Exemplo II. *Determinar a eſpeſſura, que deve ter hum tubo de cobre de 4 pollegadas de diametro, para ſuſtentar huma colunna de mercurio de 30 pés de altura.*

A tenacidade do chumbo he para a do cobre como 1 para 28 proximamente, e a gravidade eſpecifica da agua para a do mercurio como 1 para 14. Aſſim, continuando a ſervirnos da experiencia de M. Parent, e chamando x a eſpeſſura procurada, teremos $\frac{1.12.60}{1} : \frac{14.4.30}{28} :: 6 \text{ linh.} : x = \frac{1}{2}$ linha.

Applicaçaõ dos principios do equilibrio dos fluidos á determinaçaõ da figura da Terra.

55 Até agora conſiderámos, que os fluidos incompreſſiveis eraõ por toda a parte da meſma denſidade, e que eſtavaõ ſituados na ſuperficie da terra, onde a gravidade ſe póde tomar como huma força conſtante, que obra por direcçoens ſenſivelmente parallelas entre ſi. Mas ha hum ramo de Hydroſtatica muito amplo e importante, que tem por objecto a figura da terra, no qual ſe devem conſiderar as leis do equilibrio dos fluidos em hum ponto de viſta mais geral. A gravidade, que obra ſobre as partes de hum fluido, póde variar de quantidade, e de direcçaõ; e o fluido, poſto que incompreſſivel, póde naõ ter em toda a parte a meſma denſidade.

56 Os primeiros Geometras, que pela theorica procuráraõ determinar a figura da terra, conſiderando a extenſaõ immenſa dos mares, a ſua profundidade e communicaçaõ univerſal, a pouca elevaçaõ das mais altas montanhas acima do livel do mar, em comparaçaõ do raio terreſtre &c, natu-

naturalmente forão conduzidos a penſar, que a terra na ſua origem foi huma maſſa fluida, que depois ſe endureceu em parte, e que conſeguintemente devia tomar a figura, que requer o equilibrio dos fluidos. Do meſmo modo ſe diſcorreu a reſpeito dos outros planetas, e o problema geral da figura dos aſtros ſe reduzio a eſte: *Dada a lei da gravidade, que obra ſobre as partes de hum planeta fluido, achar a figura que elle deve tomar, para ſe pôr em equilibrio.*

57 Para o reſolver, M. Huyghens empregou o principio acima eſtabelecido e demonſtrado, que *eſtando huma maſſa em equilibrio, a ſua ſuperficie deve ſer por toda a parte perpendicular á direcçaõ da gravidade.* Porém Newton ſervio-ſe deſte outro principio, que *eſtando hum fluido em equilibrio, duas columnas quaiſquer conduzidas da ſuperficie ao centro fazem equilibrio entre ſi, independentemente do reſto da maſſa.* Eſtes principios ſaõ ambos igualmente verdadeiros; mas o primeiro eſtabelece o equilibrio ſómente na ſuperficie, e o ſegundo no interior da maſſa. Aſſim naõ baſtaõ ſeparadamente, para determinar a figura de hum planeta.

58 Procurando M. Bouguer por hum e outro (*Mem. de l'Acad.* 1734) a figura de hum meridiano terreſtre, e achando que em muitas hypotheſes de gravidade naõ davaõ a meſma curva, concluio que entaõ naõ havia equilibrio, e que hum planeta naõ podia tomar huma figura permanente, ſenaõ quando ambos os principios concordaſſem em dar huma meſma curva para o meridiano. Mas M. Clairaut demonſtra (*Fig. de la terre* p. 31) que ſe daõ caſos, em que ambos os principios concordaõ em dar a meſma curva, ſem haver equilibrio.

59 M. Maclaurin na ſua Obra *ſobre o fluxo e refluxo do mar*, que ganhou hum dos premios da Academia em 1740, tomou hum principio mais geral que o de Newton, o qual ſe deriva immediatamente da igualdade de preſſaõ dos fluidos, e vem a ſer, que *duas columnas conduzidas da ſuperficie para qualquer ponto do fluido fazem mutuamente equilibrio entre ſi.* Donde ſe ſegue em geral, como tem demonſtrado M. d'Alembert no ſeu *Enſayo ſobre a reſiſtencia dos fluidos*, que *eſtando huma maſſa fluida em equilibrio, qualquer canal curvilineo terminado de huma e outra parte na ſuperficie, ou tambem qualquer canal fechado, deve eſtar em equilibrio,*

60. Havendo M. Clairaut adoptado eſte principio no ſeu Tratado *da figura da terra*, em conſequencia delle propoem o methodo ſeguinte, para ſe conhecer ſe o equilibrio he compativel com qualquer hypotheſe dada de gravidade.

Seja AQN (Fig. 24.) huma maſſa fluida em equilibrio, e OM hum canal fechado de qualquer figura. Tendo tomado hum eixo fixo CP, e conduzido a ordenada MP, todas as forças que ſollicitaõ o ponto M ſe poderáõ reduzir ſempre a duas, huma perpendicular, e outra parallela a CP. Supponhamos a primeira $= P$, a ſegunda $= Q$, $CP = x$, $PM = y$, e conduzindo mp infinitamente vezinha de MP, e mr perpendicular a MP, ſerá facil de ver que a força P obra ſobre o ponto M na direcçaõ do elemento Mm com hum eſforço repreſentado por $\frac{P.rM}{Mm}$, e conſeguintemente a acçaõ ſobre todos os pontos de Mm ſerá $\frac{P.rM}{Mm} Mm = P\,dy$. Do meſmo modo ſe acharà, que a acçaõ da força Q ſobre todos os pontos de Mm pela direcçaõ Mm he $Q\,dx$. Logo $P\,dy + Q\,dx$ he a força total elementar, que obra ſobre o elemento Mm, ſegundo a ſua propria direcçaõ, e conſeguintemente $\int (P\,dy + Q\,dx)$ ſerá o pezo do canal OM. E porque deve haver equilibrio, ſeja qual for a figura do canal, he neceſſario que o integral precedente ſe poſſa achar, ſem conhecer a relaçaõ entre x e y; logo $P\,dy + Q\,dx$ deve ſer huma expreſſaõ differencial completa. *Aſſim*, concluio M. Clairaut, *quando a lei da gravidade ſor tal, que a expreſſaõ* $P\,dy + Q\,dx$ *ſeja differencial completa, haverá neceſſariamente equilibrio no fluido.*

61 Mas nem eſta condiçaõ he baſtante, como M. d'Alembert tem moſtrado no volume quinto dos ſeus *Opuſculos Mathematicos*. Appliquemos o ſeu raciocinio a hum exemplo muito ſimples.

Seja OM hum canal circular deſcrito do centro C com o raio CO, e ſeja cada ponto M ſollicitado por huma força Φ reciprocamente proporcional ao raio CM, pela direcçaõ MV perpendicular ao meſmo raio CM. Neſte ca-

ſo ſerá $P = \frac{CP}{CM}\varphi = \frac{CP}{CM^2} = \frac{x}{xx+yy}$, e $Q = \frac{y}{xx+yy}$.

Por conſeguinte ſerá $\frac{y\,dx - x\,dy}{xx+yy}$ o pezo elementar de OM (pomos o final $-$, porque creſcendo x diminue y). Mas eſta differencial he completa, porque he a de hum angulo, cuja tangente he $\frac{x}{y}$; logo deveria haver equilibrio. He porém evidente, que as forças applicadas a todos os pontos M devem produzir huma corrente perpetua no canal; logo naõ he ſufficiente o theorema de M. Clairaut.

62 Ha muitos outros caſos ſemelhantes ao que acabamos de examinar. Donde concluiremos em geral, que para haver equilibrio em huma maſſa fluida he neceſſario naõ ſómente que $P\,dy + Q\,dx$ ſeja huma expreſſaõ differencial completa, mas tambem que chamando dz o elemento de qualquer canal fechado, e P' a força que obra na direcçaõ delle, ſeja $\int P'\,dz = 0$ quando o angulo que correſponde a z, e que tem o vertice dentro do canal, for de 360°. He logo neceſſario, que o integral de $P\,dy + Q\,dx$ naõ dependa da rectificaçaõ, nem da quadratura de huma curva oval; porque de outra ſorte poderia ſuccéder, que em qualquer canal fechado naõ houveſſe equilibrio, mas huma corrente perpetua. Veja-ſe M. d'Alembert *Opuſc. Math. Tom. V. pag.* 12.

63 Applicando immediatamente o principio da igualdade de preſſaõ ao problema da figura dos aſtros, he facil de achar a figura, que deve tomar hum planeta, para ſe pôr em equilibrio, quando a lei da gravidade ſe dá directamente. Agora moſtraremos a applicaçaõ deſte principio a hum caſo, que comprehende muitos outros.

Seja $ABDE$ (Fig. 25.) huma maſſa fluida homogenea, cujas partes ſaõ attrahidas para o centro C por huma lei dada, e que além diſſo gira ao redor do eixo AD; de maneira, que cada particula M além da força da gravidade experimenta tambem a da força centrifuga, que he proporcional, como ſe ſabe, á diſtancia MP do ponto M ao eixo AD. Primeiramente vemos, que a ſuperficie $ABDE$ deve ſer em todos os pontos perpendicular á direcçaõ da reſultante da força central e da força centrifuga; reſultante,

te, que faz neſte caſo o officio da gravidade. Depois imaginando que o planeta ſe compoem de huma infinidade de camadas de livel, como $K H Q T$, vemos tambem que o fluido total eſtará em equilibrio, quando cada huma das camadas o eſtiver, e que para eſtar cada huma dellas em equilibrio he neceſſario, que ſeja igualmente comprimida em todos os ſeus pontos.

Supponhamos pois $C P = x$, $P M = y$, a força central $= \Phi$, funçaõ de x e y, e a preſſaõ no ponto $M = p$, funçaõ tambem de x e y. Supponhamos mais, que em huma diſtancia dada a he a força centrifuga $= f$. Aſſim teremos $dp = M dx + N dy$, ſendo M e N funçoens de x e y, tais que dp ſeja huma differencial completa, porque de outra ſorte naõ haveria equilibrio. E conſiderando a porçaõ de fluido que eſtá em M, como hum pequeno rectangulo $M m r n$, cuja baſe $M n = dx$, e a altura $M m = dy$, eſtá claro que $M dx$ exprime o exceſſo da preſſaõ em cada ponto de $n r$ ſobre a preſſaõ em cada ponto de $M m$, e que $N dy$ he o exceſſo da preſſaõ em cada ponto de $m r$ ſobre a preſſaõ em cada ponto de $M n$. Logo a preſſaõ total do elemento $M m r n$ na direcçaõ $n M$ ſerá $M dx . dy$, e na direcçaõ $m M$ ſerá $N dy . dx$.

Reſolvamos a força central Φ em outras duas, huma dirigida por $M n$, e a outra por $M m$; e obſervando que a maſſa do elemento he $dx dy$, ſerá a ſua força motriz abſoluta pela direcçaõ Mn repreſentada por $-\frac{\Phi x}{V(xx+yy)} . dx dy$, e pela direcçaõ Mm por $-\left(\frac{\Phi y}{V(xx+yy)} - \frac{fy}{a}\right) dx dy$. Mas, para haver equilibrio, he neceſſario que eſtas duas forças ſejaõ iguais, cada huma a cada huma das preſſoens correſpondentes. Logo teremos $M = -\frac{\Phi x}{V(xx+yy)}$, e $N = -\frac{\Phi y}{V(xx+yy)} + \frac{fy}{a}$. E conſeguintemente $dp = -\frac{\Phi(x dx + y dy)}{V(xx+yy)} + \frac{fy dy}{a}$, e $p = A + \frac{fyy}{2a} - \int \Phi$

$\int \frac{\Phi(x\,dx+y\,dy)}{V(xx+yy)}$; quantidade, que deve ſer conſtante em toda a extenſaõ de huma camada.

64 Para applicarmos eſta ſoluçaõ a hum exemplo, ſupponhamos que a força Φ he proporcional á diſtancia do centro, e que na diſtancia dada a he $= F$. Teremos entaõ $\Phi = \frac{F V(xx+yy)}{a}$, e conſeguintemente $p = A + \frac{fyy}{2a} - \frac{F(xx+yy)}{2a} =$ conſt. Eſta equaçaõ dará huma linha recta, huma ellipſe, ou huma hyperbola, conforme a raſaõ que houver entre F e f. Examinemos o caſo de $F > f$.

He evidente, que na primeira camada $ABDE$, a preſſaõ deve ſer nulla. Aſſim ſuppondo $CP' = x$, $P'M' = y$, a natureza da curva $ABDE$ será repreſentada pela equaçaõ $A - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = 0$.

Seja $CB = a$, e reflectindo que $x = 0$ deve dar $y = a$, teremos $A = \frac{(F-f)a}{2}$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, será a equaçaõ da curva $ABDE$

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right),$$

a qual he a de huma ellipſe, que tem a ametade do eixo $CB = a$, e a ametade do outro eixo conjugado $CD = a\sqrt{\left[\frac{F-f}{F}\right]}$.

Para achar a equaçaõ da curva, que forma qualquer camada interior $KHQT$, ſupponhamos $CH = b$, $CP = x$, $PM = y$, e ſerá a preſſaõ do fluido em H repreſentada por $\frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$, como he evidente. Donde teremos $p = C - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = \frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$;

e

te, que faz neſte caſo o officio da gravidade. Depois imaginando que o planeta ſe compoem de huma infinidade de camadas de livel, como $K\,H\,Q\,T$, vemos tambem que o fluido total eſtará em equilibrio, quando cada huma das camadas o eſtiver, e que para eſtar cada huma dellas em equilibrio he neceſſario, que ſeja igualmente comprimida em todos os ſeus pontos.

Supponhamos pois $C\,P = x$, $P\,M = y$, a força central $= \Phi$, funçaõ de x e y, e a preſſaõ no ponto $M = p$, funçaõ tambem de x e y. Supponhamos mais, que em huma diſtancia dada a he a força centrifuga $= f$. Aſſim teremos $dp = M\,dx + N\,dy$, ſendo M e N funçoens de x e y, tais que dp ſeja huma differencial completa, porque de outra ſorte naõ haveria equilibrio. E conſiderando a porçaõ de fluido que eſtá em M, como hum pequeno rectangulo $M\,m\,r\,n$, cuja baſe $M\,n = dx$, e a altura $M\,m = dy$, eſtá claro que $M\,dx$ exprime o exceſſo da preſſaõ em cada ponto de $n\,r$ ſobre a preſſaõ em cada ponto de $M\,m$, e que $N\,dy$ he o exceſſo da preſſaõ em cada ponto de $m\,r$ ſobre a preſſaõ em cada ponto de $M\,n$. Logo a preſſaõ total do elemento $M\,m\,r\,n$ na direcçaõ $n\,M$ ſerá $M\,dx\,.\,dy$, e na direcçaõ $m\,M$ ſerá $N\,dy\,.\,dx$.

Reſolvamos a força central Φ em outras duas, huma dirigida por $M\,n$, e a outra por $M\,m$; e obſervando que a maſſa do elemento he $dx\,dy$, ſerá a ſua força motriz abſoluta pela direcçaõ Mn repreſentada por $-\frac{\Phi x}{V(xx+yy)}\,.\,dx\,dy$, e pela direcçaõ Mm por $-\left(\frac{\Phi y}{V(xx+yy)} - \frac{fy}{a}\right)dx\,dy$. Mas, para haver equilibrio, he neceſſario que eſtas duas forças ſejaõ iguais, cada huma a cada huma das preſſoens correſpondentes. Logo teremos $M = -\frac{\Phi x}{V(xx+yy)}$; e $N = -\frac{\Phi y}{V(xx+yy)} + \frac{fy}{a}$. E conſeguintemente $dp = -\frac{\Phi(x\,dx + y\,dy)}{V(xx+yy)} + \frac{fy\,dy}{a}$, e $p = A + \frac{fyy}{2a} - \int\Phi$

ſa , para que todas eſtas attracções combinadas com a força centrifuga de cada ponto ſe ponhaõ em equilibrio. O meſmo Newton , conſiderando que a terra em virtude da ſua rotaçaõ deve ſer hum eſferoide pouco differente de huma eſfera , ſuppoz , ſem o demonſtrar , que na hypotheſe da homogeneidade do fluido a figura da terra era hum ellipſoide , e que o diametro do equador era para o eixo de rotaçaõ como 230 para 229 ; ſuppoſiçaõ , que M. Maclaurin na obra já citada moſtrou que era com effeito legitima , e alem diſſo levou muito avante eſta indagaçaõ.

67 Mas ainda faltava moſtrar directamente , que a figura elliptica he a unica , que admitte equilibrio. M. d' Alembert no ſeu Tratado *da cauſa geral dos ventos* ſatisfez a eſte ponto , moſtrando que ſe huma maſſa fluida , originalmente eſferica , girar ao redor do ſeu eixo com huma força centrifuga muito pequena em comparaçaõ da gravidade , depois de haver feito as oſcillações determinadas pelo Autor , deve acabar tomando a forma de hum eſferoide elliptico. E recentemente acaba de generalizar mais eſta indagaçaõ no tomo quinto dos ſeus Opuſculos , que ſe póde conſultar pag. 25. e ſeg.

68 A verdadeira raſaõ dos eixos da terra naõ he com tudo a de 230 para 229 , dada pela hypotheſe da homogeneidade das partes no ſyſtema Newtoniano , mas a de 178 para 177 proximamente , conforme as obſervações feitas em França , na Laponia , e no Perú. Donde concluiremos , que a terra naõ he homogenea. Suppondo ſempre a attracçaõ univerſal e reciproca das partes , he facil de achar huma lei entre as denſidades , que ſatisfaça ás obſervações ; mas eſta indagaçaõ naõ póde ſer proſeguida com a extenſaõ que requer nos limites de hum Tratado elementar. Póde recorrer-ſe ás obras , que temos citado.

CAPITULO II.

Do Equilibrio dos Fluidos Elaſticos.

69 SEm entrar no exame das conjecturas phyſicas ſobre a cauſa da virtude elaſtica , ſuppomos como hum facto , que certos corpos ſe reduzem a menor volume

lume, quando ſaõ comprimidos por huma força exterior; e que em ceſſando a compreſſaõ, ſe reſtituem ao primeiro eſtado por huma virtude chamada elaſtica, que nelles reſide, e que exercita a ſua acçaõ com a meſma força para todas as partes.

70 Os fluidos elaſticos eſtaõ ſujeitos ás meſmas leis geraes do equilibrio dos fluidos incompreſſiveis, que ſe derivaõ da propriedade primordial, commua a todos os liquidos, que qualquer particula de huma maſſa fluida em equilibrio he igualmente comprimida de todas as partes.

71 Aſſim demonſtraremos do meſmo modo, que *ſe a todos os pontos da ſuperficie de hum fluido elaſtico naõ pezado ſe applicarem perpendicularmente potencias iguais, eſtas faraõ equilibrio entre ſi*; e que *a ſuperficie perfeitamente livre de qualquer fluido elaſtico pezado, e em equilibrio em hum vaſo ſolido, ou flexivel, he horizontal*; propoſições, de que reſultaõ as meſmas conſequencias, que deduzimos a reſpeito dos fluidos incompreſſiveis.

72 Agora paſſando ao que em particular pertence aos fluidos elaſticos, do meſmo principio geral concluiremos, que *a força elaſtica em qualquer lugar de huma maſſa fluida, ſejaõ quais forem as potencias que actuarem ſobre ella, he igual e contraria á preſſaõ do fluido no meſmo lugar*; porque ſe eſtas duas forças naõ foſſem iguais e contrarias, a maior venceria a menor, e naõ haveria equilibrio, contra a ſuppoſiçaõ.

73 Donde ſe ſegue, que ſe hum fluido elaſtico, depois de ſer comprimido por huma cauſa exterior, ficar em liberdade, e empregar a ſua elaſticidade contra hum obſtaculo, actuará com hum esforço igual ao que o tinha comprimido.

74 Segue-ſe tambem, que comprimindo-ſe o fluido a ſi meſmo pelo proprio pezo (Fig. 26.), a força elaſtica de qualquer ſecçaõ $Mmba$ de huma eſpeſſura infinitamente pequena Ma, he igual ao pezo abſoluto da columna vertical $EKmM$; porque eſte pezo he a força comprimente da dita ſecçaõ (n. 37.).

75 Seja pois a area de qualquer ſecçaõ horizontal da columna $Mm = b^2$, a altura do liquido $MB = x$, a eſpeſſura do elemento $Ma = dx$, e a gravidade eſpecifica delle $= P$. Teremos o ſeu volume $= b^2\,dx$, e o pezo abſoluto $= b^2\,P\,dx$; e conſeguintemente o pezo abſoluto

to da columna $BMmk = b^2 \int P\,dx$. Aſſim ſerá neceſſario, para o determinar, conhecer P em x, iſto he, ſaber a lei das gravidades eſpecificas do fluido conforme as alturas verticais.

76 E porque a preſſaõ, que padece qualquer elemento fg (Fig. 27.) da ſuperficie das paredes de hum vaſo, he igual ao pezo abſoluto da columna vertical, que tem a baſe igual ao meſmo elemento (n. 39.); ſuppondo $fg = dS$, teremos $dS \int P\,dx$ por expreſſaõ da força, que exercita o fluido contra o elemento fg; logo $\int dS \int P\,dx$ ſerá a preſſaõ total ſobre qualquer parte finita da ſuperficie fr.

77 Exemplo I. *Suppondo, que as gravidades eſpecificas do fluido ſaõ na raſaõ das alturas verticais, contadas deſde a ſuperficie, determinar a preſſaõ do fundo horizontal NQ do vaſo $ANQE$* (Fig. 28.).

Seja a area do fundo $NQ = b^2$, a altura do fluido $Nt = a$, e a gravidade eſpecifica delle na parte immediatamente applicada ao fundo $= p$. Logo ſerá $a : p :: x : P = \frac{px}{a}$; e ſubſtituindo eſte valor na formula $b^2 \int P\,dx$, teremos a preſſaõ ſobre o fundo do vaſo $= \frac{pb^2}{a} \int x\,dx = \frac{p\,b^2\,x^2}{2\,a} = \frac{p\,b^2\,a}{2}$; ametade do que ſeria, ſe o fluido em toda a altura tiveſſe huma gravidade eſpecifica igual á do fundo.

Se $b^2 = 1$ pé quadrado, $a = 100$ pés, $p = \frac{1}{800}$ da gravidade eſpecifica da agua, iſto he, $p = \frac{70}{800} = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{p\,b^2\,a}{2} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 100}{2 \cdot 80} = 4\frac{3}{8}$ libras.

78 Exemplo II. *Suppondo a meſma lei das gravidades eſpecificas, determinar a preſſaõ que ſofre a parte fN da parede de hum vaſo rectangular $ANQE$* (Fig. 29.).

Seja $AN = b$, $Af = a$, a dimenſaõ horizontal do rectangulo $AN = b$, a gravidade eſpecifica no ponto $f = p$;

e teremos $P = \frac{p x}{a}$, e $dS = b\,dx$. Logo ſubſtituindo eſtes valores na formula $\int dS \int P\,dx$, teremos a preſſaõ $= \int b\,dx \int \frac{p x}{a}\,dx = \frac{b p x^2}{6a}$; tomando eſte integral entre os limites de $x = a$, e $x = b$, ſerá a preſſaõ contra a ſuperficie $fN = \frac{bp}{6a}\left(b^2 - a^2\right)$.

Se $b = 10$ pés, $b = 100$, $a = 50$, $p = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{bp}{6a}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 125000}{6 \cdot 50 \cdot 80} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2500}{6 \cdot 8}$ $= \frac{7 \cdot 7 \cdot 625}{12} = 2552\,\frac{1}{12}$ libras.

Se p foſſe a gravidade eſpecifica do fluido immediatamente ao fundo, acharíamos a preſſaõ de toda a parede rectangular $AN = \frac{p\,b\,b^2}{6}$, que he hum terço do que reſultaria ſe o fluido tiveſſe a meſma gravidade eſpecifica em toda a altura.

79 Eſtes exemplos podem multiplicar-ſe infinitamente, naõ ſó na hypotheſe preſente, mas em quaiſquer outras. Porém eſtas determinaçõens raras vezes podem applicar-ſe á pratica, attendida a incerteza das meſmas hypotheſes. O mais ſeguro he reccorrer á experiencia; e tendo achado por ella a preſſaõ, que o fluido elaſtico faz contra huma ſuperficie horizontal dada, por huma ſimples proporçaõ concluiremos a preſſaõ, que ha de fazer em qualquer outra ſuperficie horizontal, vertical, ou inclinada, ſuppondo que a denſidade he a meſma, ou ſenſivelmente a meſma, em todos os caſos.

80 De qualquer modo que ſe determinem eſtas preſſões, deve notar-ſe que os effeitos dellas ſeguem a meſma lei dos fluidos incompreſſiveis. Aſſim podemos concluir, como acima (n. 45. 46.), que duas quaiſquer colunnas fluidas elaſticas, da meſma ou de differente eſpecie, eſta-

aſtaraõ ſempre em equilibrio, ſejaõ quais forem as ſuas denſidades, todas as vezes que as preſſões, que exercitaõ ſobre as ſuas baſes, forem proporcionais ás meſmas baſes.

81 Se hum fluido elaſtico, alem da acçaõ da gravidade propria, for comprimido por huma força externa, acharemos a preſſaõ que reſulta contra as paredes do vaſo, conſiderando que a acçaõ da força externa ſe diſtribue igualmente a todos os pontos do fluido, e combinando-a com a que provém da gravidade, como temos moſtrado a reſpeito dos fluidos incompreſſiveis.

Do Equilibrio do Ar.

82 DE todos os fluidos elaſticos, o ar he o mais conhecido, o mais eſpalhado, e o mais util ás neceſſidades dos homens. Por iſſo merece, que examinemos particularmente as ſuas propriedades com alguma miudeza. Para o fazer em rigor geometrico, ſeria neceſſario conhecer exactamente a figura das moleculas deſte fluido, e a lei preciſa que obſervaõ quando ſe comprimem, ou dilataõ, pelo frio, pelo calor, ou por outras cauſas phyſicas, ſobre o que naõ temos as noções ſufficientes. Em falta dellas naõ abraçaremos hypotheſes incertas, e precarias, mas recorreremos á experiencia.

83 *O ar he hum fluido pezado.* Eſta verdade ignorada dos antigos foi demonſtrada a primeira vez por Torricelli no anno de 1643, por meio da experiencia ſeguinte.

Tomou hum canudo de vidro *AB* (Fig. 30.) de quaſi tres pés de comprimento, aberto em huma das extremidades *A*, e fechado exactamente na outra *B*; e havendo-o enchido de azougue, tapou com o dedo a extremidade *A*, e a mergulhou no vaſo *MCDN* no qual tinha lançado previamente huma quantidade ſufficiente de azougue. Poſto aſſim o tubo em huma ſituaçaõ vertical, tirou o dedo, e deixou o azougue nelle incluido á acçaõ do ſeu pezo. O effeito foi, que o azougue depois de varias oſcillações ficou elevado no tubo até a altura *AE* de quaſi 28 pollegadas acima do livel *MN* do azougue que eſtava no vaſo.

Á viſta deſte phenomeno concluio Torricelli, que a colunna *AE* naõ podia ficar ſuſpenſa dentro do tubo, ſenaõ

ſenaõ para fazer equilibrio com a preſſaõ do ar exterior ſobre a ſuperfice do azougue que eſtava no vaſo ; preſſaõ , que naõ tinha lugar na columna interior do tubo , por eſtar a extremidade ſuperior tapada hermeticamente. E com effeito , quebrando levemente a meſma extremidade , para dar entrada ao ar , immediatamente cahe a columna , e ſe poem todo o liquido ao meſmo livel. Os *barometros* ordinarios naõ ſaõ outra couſa , ſenaõ o tubo de Torricelli em experiencia continua.

Adiante veremos , fallando mais particularmente do barometro , que a altura do mercurio neſte inſtrumento eſtá ſujeita a muitas variações locais , e phyſicas.

84 Sendo pois o pezo abſoluto de qualquer columna de ar , que inſiſte ſobre a ſuperficie da terra , igual ao de huma columna de mercurio , que tem a meſma baſe e huma altura conhecida , he facil de determinar o pezo de toda a maſſa do ar , que cérca o globo terreſtre. Para iſſo , ſuppondo o raio da terra $= R$, a altura do mercurio $= r$, a circumferencia do circulo que tem a unidade por diametro $= c$, a gravidade eſpecifica do mercurio $= p$, naõ ha mais que multiplicar por p a differença entre duas esferas , huma que tenha o raio R , e a outra o raio $R + r$. Aſſim teremos o pezo da atmoſfera $= \frac{4}{3} p c \left[(R + r)^3 - R^3 \right] = \frac{4}{3} p c (3 R^2 r + 3 R r^2 + r^3)$; e deſprezando os termos que contem r^2 e r^3 , teremos $4 p c R^2 r$ por expreſſaõ geral e muito approximada do pezo total do ar.

Suppondo $r = 28$ pollegadas , $p = 960$ libr. , e hum gráo de circulo maximo terreſtre $= 57000$ toeſas , acharemos o pezo total da atmosfera $= 1102885487709090909 1$ libras proximamente.

85 Como huma columna de mercurio de 28 pollegadas de altura deve fazer equilibrio a huma de agua de 32 pés (n. 46.) ; ſegue-ſe , que ſendo a primeira ſuſtentada pela preſſaõ exterior da atmosfera , tambem o deverá ſer a ſegunda. Aſſim o confirma a experiencia ſeguinte.

Seja QH o cano de huma bomba vertical (Fig. 31.) , mergulhado na agua $MCDN$ pela extremidade Q que he aberta. Fazendo ſubir o embolo K , que enche exactamente a capacidade do tubo , a agua ſubirá atraz delle até

a

á altura de 32 pés com pouca differença, e dahi para cima, ainda que ſe continue a levantar o embolo, naõ ſubirá mais. A raſaõ he, porque levantando o embolo fica atraz delle hum vazio, onde o ar exterior naõ póde entrar, mas a preſſaõ livre do meſmo ar ſobre a ſuperficie *M N* fórça a agua a entrar pela abertura Q, e a ſubir pelo tubo até a altura de 32 pés, onde faz equilibrio com a dita preſſaõ.

86 Supponhamos, que havendo chegado a agua á altura *A B* de 32 pés, ſe continûa a levantar o embolo, de maneira que entre a baſe delle e a ſuperficie da columna *B T* fique hum vazio, como *B P*. Entaõ, ſe na parede do tubo entre os pontos *A* e *B*, ſe fizer huma abertura lateral *E*, o ar exterior entrará impetuoſamente por ella, e dividirá a colunna *A T* em duas partes *A F*, *E T*. A primeira das quaïs cahirá pelo ſeu pezo, porque o ar que entra por *E* eſtá em equilibrio com a preſſaõ que a fazia ſubir pela extremidade Q; mas a ſegunda parte *E T*, ſendo comprimida pelo meſmo ar, que igualmente actûa para cima, ſubirá neceſſariamente pelo eſpaço vazio *B P*.

Eſte phenomeno ſe vio a primeira vez em Sevilha no anno de 1766, onde hum funileiro emprendeu fazer ſubir a agua á altura de 50 pés por huma bomba aſpirante, e enfadado de que ella naõ ſubiſſe deu huma martellada no cano, com a qual ſuccedeu abrirlhe hum buraco de quaſi huma linha de diametro, a 10 pés de altura acima do livel da agua; e dando depois á bomba, ſahio a agua. Eſta experiencia foi logo repetida em muitas partes, e ſe achou que com pouca quebra dá a bomba a agua da colunna *E T*; depois do que, he neceſſario tornar a dar á bomba, tapando o buraco *E*, e tornando-o a deſtapar quando a agua tiver ſubido pelo cano á altura de 32 pés. Aſſim fechando, e abrindo alternativamente o buraco *E*, ſe póde fazer huma eſpecie de bomba, que levante a agua a muita altura; mas terá o inconveniente de dar pouca agua, e com grandes intermittencias. Adiante moſtraremos o modo de determinar a altura, até onde o ar que entra pelo buraco *E* póde levantar a colunna *E T* pelo eſpaço vazio *B P*.

87 Seja *A B O* (Fig. 32.) a *catimplora*, de que ſe uſa ordinariamente para treſpaſſar os licores de humas vaſilhas

lhas para outras. Eſte inſtrumento he hum canudo curvo de braços deſiguais *A B*, *B O*. Mergulhando o mais curto *A B* em hum vaſo *M C D N*, e extrahindo-lhe o ar pela outra extremidade *O*, ſorbendo com a boca, ou de qualquer outra maneira, o licor ſubirá por elle, e ſahirá continuamente pelo orificio *O*, até o vaſo ſer eſgotado, com tanto que o ponto *O* eſteja mais baixo que o fundo delle.

Para declaraçaõ deſte effeito, ſupponhamos que a extremidade *O* eſtá mergulhada em outro vaſo *E F*, que contém já alguma quantidade do meſmo licor. Bem ſe vê, que cada hum dos braços da catimplora *A B*, *B O* póde conſiderar-ſe, como hum tubo de Torricelli. Aſſim repreſentando a preſſaõ da atmosfera por K *X*, o pezo da columna fluida *A B* por K *V*, e o da columna *B O* por K *Z*, eſtá claro que *V X* exprime a força que levanta o fluido pelo braço *A B*, e *Z X* a que tende a levantallo pelo braço *O B*; e como eſtas forças ſaõ contrarias, a menor ſerá deſtruida, e reſtará a força *Z V*, que produzirá huma corrente do fluido por *A B O*.

Daqui ſe vê 1°, que ſendo K *V* = K *Z* naõ poderá haver movimento. 2°, que tambem o naõ haverá quando K *V* naõ for menor que K *X*. Outras relações podem ter eſtas tres forças, cujo exame he inutil neſte lugar.

88 *O ar he hum fluido elaſtico.* A verdade deſta propoſiçaõ conſta de infinitas experiencias. Baſta introduzir o ar em huma bexiga, e ver que ella ſe contrahe, quando a comprimem; e que ſe torna a dilatar, quando a deixaõ.

89 Logo *a força elaſtica do ar comprimido he igual á força, que produzio a ſua compreſſaõ.* He huma conſequencia evidente do que acima moſtramos (n. 73. e 74.), e prova-ſe com muitas experiencias, entre as quais a *fonte de Heron* he huma das mais ſenſiveis.

Eſta maquina compoem-ſe de huma caixa *ABCD* (Fig. 33.), fechada de todos os lados, e cheia de agua até *E F* hum pouco abaixo de *A B*; de outra caixa *G H K I*, tambem fechada de todos os lados, igual á primeira, e cheia de ar; de hum tubo *O T* ſoldado exactamente com as tampas *A B*, *D C*, *G H*, o qual ſahe fóra pela extremidade *O*, e com a extremidade *T* chega muito perto do fundo *I K* da caixa inferior; de outro tubo *X Y*, ſolda-

ſoldado nas duas caixas, cuja extremidade ſuperior *K* eſtá perto da tampa *A B*; e finalmente do tubo *Q P*, cuja extremidade inferior chega perto do fundo *D C*, e a ſuperior ſoldada na tampa *A B* he guarnecida pela parte exterior com hum bocal de eſguicho.

Iſto poſto, tapando o orifico *Q* com o dedo, e lançando hum pouco de agua pelo canudo *O T*, ella deſcerá para *I K*, e ſubirá por exemplo até *S V*. Entaõ naõ haverá mais communicaçaõ do ar exterior com o que eſtá nas duas caixas; e continuando a lançar a agua, o ar incluido nos eſpaços *G H S V*, *A B F E*, e *X Y* ſe condenſará pouco a pouco até que a ſua força elaſtica eſteja em equilibrio com a preſſaõ da agua lançada por *O T*. Se a ſuperficie da agua na caixa *G H K I* eſtiver em *M N*, o dito ar comprimirá cada parte della com huma força igual ao pezo de huma columna de agua, que tenha por baſe a parte comprimida, e por altura *L O*. Com eſta meſma força he comprimida a ſuperficie *E F* da agua na caixa ſuperior, e tende a ſubir pelo canudo *P Q*: de maneira, que deſtapando o orificio, reſulta huma fonte de repuxo, que ſobe a huma altura *R Z* = *O L*. Donde ſe moſtra, que a elaſticidade do ar produz o meſmo effeito que produziria o pezo da columna, pela qual foi comprimido.

Póde notar-ſe, que fazendo entrar por *O* a agua que cahe do repuxo, eſta paſſará para a caixa inferior, e a fonte continuará até que a agua comprehendida deſde o ponto *P* até *E F* tenha ſahido toda.

90 Sendo pois o ar pezado, e elaſtico, he manifeſto que ſe deve comprimir a ſi meſmo pelo proprio pezo, e que conſiderando a atmoſfera dividida em camadas concentricas á terra, as inferiores que ſuſtentaõ o pezo das ſuperiores eſtaráõ cada vez mais comprimidas, ſendo as outras couſas iguais. Digo *ſendo as outras couſas iguais*, porque ha outras cauſas, como o frio e o calor, que concorrem a comprimir e dilatar o ar, e por iſſo a denſidade deſte fluido he muito variavel. Tem-ſe obſervado ſer eſta de oito até nove centas vezes menor, que a da agua, e a denſidade media nos noſſos climas póde exprimir-ſe ſenſivelmente por $\frac{1}{850}$, e a gravidade eſpecifica, ou o pezo

de hum pé cubico de ar junto á ſuperficie da terra pe$ $\frac{7}{85}$ libr.

91 Se o ar comprimido pelo pezo da atmosfera, ficar em liberdade para empregar a acçaõ da ſua elaſticidade, produzirá o meſmo effeito, que pelo dito pezo ſeria produzido. He huma conſequencia do que acima moſtramos (n. 89.), e ſe confirma com a experiencia ſeguinte.

Tome-ſe hum vaſo cylindrico de vidro *ABCD* (Fig. 34.), com huma quantidade de mercurio *AEFD*; meta-ſe nelle hum tubo *K* de 29 até 30 pollegadas, aberto por ambas as extremidades, e mergulhado no mercurio; tape-ſe exactamente a boca do vaſo ao redor do tubo, de maneira que o ar contido no eſpaço *EBCF* naõ communique com o de fóra; e ponha-ſe no recipiente da maquina pneumatica *LIHM*. Entaõ evacuando o ar do recipiente ſe verá, que dilatando-ſe o ar *EBCF* faz abaixar a ſuperficie do mercurio até *NO*, obrigando-o a ſubir pelo tubo *K* a huma altura quaſi igual á que tiver o barometro no lugar onde ſe faz a experiencia. Digo *quaſi igual*, porque naõ he poſſivel evacuar perfeitamente o ar do recipiente da maquina pneumatica.

92 Se huma quantidade de ar ſe reduzir pela compreſſaõ a occupar differentes eſpaços, ou volumes, eſtes ſeraõ na raſaõ inverſa das forças comprimentes. Eſta propoſiçaõ ſe prova pela experiencia ſeguinte.

Prepare-ſe hum tubo, como ſe moſtra na Fig. 35., fechado hermeticamente em *C* e aberto em *A*, e diſponha-ſe de maneira que os braços *DA*, *EC* (que devem ſer perfeitamente cylindricos) ſejaõ verticais, e a parte *DE* horizontal. Lance-ſe por *A* hum pouco de mercurio para encher o canal *DE*, procurando que as duas ſuperficies *IE*, *DV* deſte fluido nos dous braços verticais eſtejaõ de livel, a fim de que o ar fechado no eſpaço *EC* eſteja no meſmo eſtado de compreſſaõ que o ar exterior. Aſſim o ſupporemos comprimido pelo pezo de huma columna de mercurio de 28 pollegadas de altura, e ſendo *EC* de 12 pollegadas, ſerá o volume do ar como 12, e a força comprimente como 28. Continuando a lançar mercurio, e achando-ſe as ſuperficies deſte fluido em *F*, *H*, tirando a horizontal *FG*, ſe *GH* for de 14 pollegadas ſerá *FC* de

8,

8, ſe *GH* for de 28, ſerá *FC* de 6 &c, iſto he, ſe a força comprimente for 14 + 28 ſerá o volume 8, e ſe a força for 28 + 28 ſerá o volume 6 &c. Donde ſe vê, que ſendo as forças comprimentes como 28, 42, 56, os volumes correſpondentes ſaõ como 12, 8, 6, iſto he, na raſaõ inverſa dellas.

93 He de advertir, que ſem embargo de ſe achar por eſta experiencia, que os volumes ſaõ exactamente na raſaõ inverſa das forças comprimentes, naõ deve eſte reſultado tomar-ſe como regra geral para quaiſquer que ſejaõ as forças. Nos caſos extremos, quando eſſas forem muito grandes, ou muito pequenas, a regra naõ poderá ſubſiſtir, porque a elaſticidade do ar terá certos limites, alem dos quais ſe naõ poſſa comprimir, nem dilatar. Porém como na pratica ſe naõ chega jamais a eſtes caſos, póde a regra conſiderar-ſe verdadeira, ſem reſtricçaõ alguma, em quanto o ar que recebe as differentes compreſsões eſtiver no meſmo gráo de temperatura.

94 Como as denſidades de huma meſma maſſa ſaõ na raſaõ inverſa dos volumes a que ella ſe reduz (n. 11.), eſtá claro que as denſidades de huma quantidade de ar comprimida por differentes forças ſaõ proporcionais ás meſmas forças comprimentes, e conſeguintemente ás elaſticidades que ella tem neſtes differentes eſtados (n. 89). O meſmo ſe entenda das gravidades eſpecificas, que ſaõ proporcionais ás denſidades (n. 18.).

95 Suppondo pois que huma colunna vertical da atmoſfera eſtá toda no meſmo gráo de temperatura, e imaginando-a compoſta de huma infinidade de camadas horizontais, e de maſſas iguais, a denſidade de cada huma ſerá proporcional ao pezo de que eſtá carregada, o qual he a ſoma dos pezos das camadas ſuperiores. Logo a denſidade de cada camada he proporcional á ſoma das denſidades das camadas ſuperiores. Aſſim formaráõ as denſidades de cima para baixo huma ſerie tal, que dous termos conſecutivos ſeraõ entre ſi como as ſomas dos termos reſpectivamente precedentes, iſto he, formaráõ as denſidades huma progreſſaõ geometrica, e do meſmo modo as gravidades eſpecificas.

No eſtado phyſico das couſas, naõ tem lugar geralmente eſta progreſſaõ, como abaixo veremos pela experiencia. Quando o calor, ou o frio varia em differentes

camadas, perde-ſe o equilibrio, reſultaõ correntes, os ventos por diverſas direcções, e a denſidade do fluido participa neceſſariamente deſtas variações.

96 Antes de acabarmos eſte artigo, examinemos as dilatações do ar na maquina pneumatica. He inutil deſcrever aqui por meudo eſte inſtrumento, que todo o mundo conhece. Obſervaremos ſomente, que as ſuas peças principais ſaõ o recipiente, o prato em que elle ſe aſſenta, a ſiringa, o embolo della, e hum regiſto feito de maneira, que virando-ſe de hum modo permitte communicaçaõ ao recipiente com o vaõ da ſiringa, ſem a permittir com o ar exterior, e virando-ſe de outro modo permitte communicaçaõ ao ar exterior com o vaõ da ſiringa, ſem lha permittir com o recipiente.

97 Iſto poſto, ſeja A a ſoma das capacidades do recipiente e da parte ſuperior da ſiringa, que fica vazia quando o embolo eſtá levantado, B a ſoma das capacidades do recipiente e do vaõ total da ſiringa, quando o embolo ſe tem abaixado, D a denſidade do ar no eſtado natural, m a raſaõ que eſta denſidade tem com a do ar rarefeito no recipiente, n o numero das vezes que ſe tem movido o embolo. Primeiramente o ar do recipiente tem a meſma denſidade D do ar exterior; mas abaixando o embolo, o ar que eſtava no eſpaço A, ſe dilatará uniformemente no eſpaço B, e conſeguintemente ſerá a ſua denſidade $= D\frac{A}{B}$ (n. 11.). Depois, quando ſegunda vez ſe torna a abaixar o embolo, o ar que eſtava no eſpaço A com a denſidade $D\frac{A}{B}$ ſe dilatará do meſmo modo no eſpaço B, e ficará com a denſidade $D\frac{A^2}{B^2}$; e em geral, quando o embolo ſe abaixar a vez n, ficará o ar do recipiente com a denſidade $D\frac{A^n}{B^n}$. Logo teremos $D = mD\frac{A^n}{B^n}$, ou $B^n = mA^n$, e conſeguintemente $n\,l\,B = l\,m + n\,l\,A$.

Donde ſe vê, que das quatro quantidades m, n, A, B, ſendo dadas tres, a quarta ſe póde determinar com muita facilidade. Igualmente ſe vê, que naõ he poſſivel evacuar perfeitamente o recipiente; porque ainda que a dilataçaõ

do ar naõ tiveſſe limite algum phyſico, naõ poderia reduzir-ſe a huma denſidade nulla, ſenaõ depois de ſe andar infinitas vezes com o embolo.

Conſtrucçaõ, e uſo do Barometro.

98 O *Barometro* ſerve, como já diſſemos (Fig. 30.), para moſtrar o pezo do ar, ou os differentes eſtados da compreſſaõ da atmosfera. Há-os de muitas eſpecies; mas aqui naõ fallamos ſenaõ do barometro ſimples, ao qual ſe reduzem todos os outros, e que naõ he outra couſa mais do que o tubo de Torricelli applicado a huma taboa vertical, a qual ſe divide em pollegadas, começando deſde a ſuperficie do mercurio expoſta á preſſaõ do ar, e na parte ſuperior ſe ſubdivide em linhas, e meias linhas, para moſtrar as variações que tem a columna do mercurio, conforme o eſtado da atmosfera.

99 Por quanto temos viſto, que a elaſticidade do ar he igual á força que o comprime; eſtá claro, que tanto o pezo do ar, como a ſua elaſticidade devem ſuſtentar o mercurio no barometro em a meſma altura. Daqui vem, que em huma camara bem fechada, e debaixo de huma manga de vidro poſta ſobre huma meza horizontal, o barometro moſtra a meſma altura do mercurio, como no ar livre. Eſta ſuſpenſaõ he produzida pelo elaterio do ar, que tinha ſido comprimido pelo ar exterior antes de ſe interromper a ſua communicaçaõ.

100 O tubo de hum barometro deve ter ao menos duas ou tres linhas de diametro interior, para que o mercurio nelle incluido ſeja pouco ſenſivel á impreſſaõ do calor, que tende a dilatallo. Sem embargo deſta precauçaõ muitas vezes ſe vê, que os barometros em hum meſmo lugar naõ concordaõ exactamente por outras cauſas, como alguma pequena deſigualdade nas gravidades eſpecificas dos mercurios, a difficuldade de os purificar igualmente do ar, as differentes aſperezas das paredes dos tubos, o vazio mais ou menos perfeito na parte ſuperior delles &c.

101 Suppondo que por falta de precauçaõ, ou de qualquer maneira, ſe tem metido ar no eſpaço *E B*, ſerá facil determinar a relaçaõ entre a preſſaõ da atmosfera, a altura *A B* do tubo acima do livel *M N*, a altura do eſpaço

paço que o ar incluido em EB occuparia naturalmente ; e a altura em que o mercurio ficará ſuſpenſo acima do livel MN.

Seja BH o eſpaço, que o ar incluſo occuparia no eſtado natural, ſe o tubo eſtiveſſe aberto em B, e elle communicaſſe com o ar exterior. He evidente, que eſte ar achando hum obſtaculo em B ſe dilatará para a parte inferior, e que impellindo de cima para baixo a colunna do mercurio AE, eſta ficará ſomente em equilibrio, quando a ſoma da força elaſtica do ar dilatado em BE, e do pezo da meſma colunna, for igual á preſſaõ da atmosfera, iſto he, ao pezo de huma colunna de mercurio da altura b. E porque a força elaſtica do ar natural BH he repreſentada por b, ſerá a força do ar dilatado BE repreſentada por $\frac{b.BH}{BE}$; logo teremos $\frac{b.BH}{BE} + AE = b$, ou $\frac{b.BH}{AB - AE} + AE = b$. Aſſim das quatro linhas b, BH, AB, AE, ſendo dadas tres, a quarta ſe determinará facilmente por eſta equaçaõ.

102 Sendo pois o barometro conſtruido com toda a perfeiçaõ, he facil de ver que nos lugares mais baixos, onde a preſſaõ da atmosfera he maior, deve o mercurio ſuſtentar-ſe em maior altura ; e aſſim o moſtra a experiencia, quando outras cauſas o naõ impedem. He couſa ſabida, que no meſmo lugar eſtá ſujeita a altura do mercurio a frequentes variações, conforme os differentes eſtados da atmosfera. Eiſaqui os factos gerais, que moſtra a experiencia, poſto que algumas vezes tenhaõ ſuas excepções.

I. Ordinariamente ſe ſuſtenta o mercurio em maior altura, quando o tempo he bom, fixo, ſeco, e ſereno.

II. Pelo contrario he menor a ſua altura, quando o tempo he mudavel, chuvoſo, tempeſtuoſo, ou quando o ar eſtá muito humido, e carregado de vapores.

III. As maiores variações do barometro tanto em ſubir, como em deſcer, ſuccedem ſempre no inverno ; e eſtas variações ſaõ em geral mais ſenſiveis nos paizes frios do que nos quentes.

IV. Se eſtando bom tempo começa o mercurio a deſcer ſenſivelmente, quaſi ſempre he final de chuva, ou de vento.

V. E pelo contrario, quando em tempo chuvoſo ſobe conſtantemente o mercurio, he ſinal de haver proximamente mudança para bom tempo.

VI. Quando o tempo eſtá muito calmoſo, a deſcida do mercurio he frequentemente hum prognoſtico de trovoada.

VII. No tempo frio a ſubida do mercurio annuncia a congelaçaõ; e a deſcida em tempo de gelo prognoſtica a deſcongelaçaõ.

103 A explicaçaõ deſtes phenomenos tem dado que fazer aos Phyſicos. M. de Mairan attribue tudo aos ventos, ou geralmente ás agitações do ar produzidas pelo calor do Sol, ou do fogo central, que elle ſuppoem emanar continuamente das entranhas da terra, cuja acçaõ póde ſer modificada por muitas cauſas phyſicas, e locais.

M. Halley explica os meſmos phenomenos pela combinaçaõ dos ventos, que reinaõ actualmente, com a exhalaçaõ, e precipitaçaõ dos vapores, que andaõ fluctuando no ar, e que ſe achaõ em maior, ou menor quantidade em hum tempo que em outro.

104 Deixando muitas outras conjecturas a eſte reſpeito, que ſe podem ver nos livros de Phyſica, a explicaçaõ do Baraõ de Leibnitz me parece muito attendivel. Quando o tempo he chuvoſo, diz elle, deve o mercurio deſcer, porque vindo entaõ a cahir os vapores, que antes eraõ ſuſtentados pelo ar, eſte fica menos comprimido, e conſeguintemente mais leve; e em confirmaçaõ propoem a experiencia ſeguinte.

Em hum cylindro *A B* (Fig. 36.) cheio de agua ponha-ſe hum corpo *D* eſpecificamente mais pezado, mas oco, e com hum orificio tapado de ſorte que ſeja ſuſtentado na ſuperficie da agua. O todo ſe pendure do braço de huma balança, e ſe ponha em equilibrio com hum pezo *C*. Entaõ, deſtapando o orificio do corpo *D*, entrando nelle a agua, e começando a cahir, o equilibrio ſe rompe, e a balança ſe inclina para a parte do pezo *C*. Comparando pois o pezo *C* á colunna do mercurio do barometro, a agua do cylindro á colunna da atmoſfera, e o pezo *D* ás gotas da chuva, he facil de entender, que em quanto o vapor dividido em partes tenuiſſimas he ſuſtentado pela atmoſfera, ſaõ as colunnas della mais pezadas, e devem ſuſtentar o mercurio em maior altura; e que ajuntando-

tando-ſe em gotas maiores, que comecem a cahir fica á atmosfera mais leve, e conſeguintemente deve o mercurio deſcer no barometro. E a deſcida precede a chuva actual, porque as gotas ſe formaõ, e cahem por intervallos, antes de chegarem á terra.

105 Eſta explicaçaõ he muito ſimples, e natural: mas para lhe darmos toda a exactidaõ, conſideremos hum corpo eſferico deſcendo pela ſua gravidade em hum fluido incluido em hum vaſo immovel, e buſquemos a preſſaõ que deve cauſar ſobre o fundo delle. Para iſſo reflectiremos, que a gravidade do corpo he igual ao exceſſo do ſeu pezo ſobre o de hum igual volume do fluido, como ſe moſtrará no Capitulo ſeguinte; e que a reſiſtencia, que encontra da parte do meſmo fluido, communicando-ſe por elle até o fundo do vaſo, he a preſſaõ que nelle reſulta do movimento do corpo na ſua deſcida actual. Supporemos tambem que a reſiſtencia, que encontra perpendicularmente huma ſuperficie plana da parte de hum fluido, he proporcional ao producto da meſma ſuperficie pelo quadrado da ſua velocidade, e que a reſiſtencia de huma eſfera, como moſtraremos na Segunda Parte, he ametade da que experimentaria perpendicularmente hum dos ſeus circulos maximos com a meſma velocidade.

Iſto poſto, ſeja o raio da eſfera $= R$, o pezo abſoluto della $= P$, o pezo de hum volume igual do fluido $= P'$, o eſpaço $= s$, a velocidade $= u$, a reſiſtencia que experimenta huma ſuperficie a^2 com a velocidade $V = F$, a reſiſtencia que padece a eſfera $= f$, e c a circumferencia que tem por diametro a unidade. He facil de ver, que deve ſer $f = \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$, e que a força que ſollicita o movel de cima para baixo he $P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$. Aſſim, pelo principio ordinario das forças acceleratrizes, teremos a equaçaõ

$$P u du = \left(P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2} \right) ds .$$

Suppondo para maior ſimplicidade, que $P - P' = M$, e $\frac{c F R^2}{2 a^2 V^2} = n$, eſta equaçaõ ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$P u$$

$$P u\,du + n u^2\,ds = M\,ds.$$

Multipliquemos todos os termos por huma funçaõ φ de s, a qual ſe ſupponha que a faz integravel; e teremos primeiramente

$$\varphi P u\,du + \varphi n u^2\,ds = \varphi M\,ds.$$

Depois ſupponhamos, que he $\frac{\varphi P u^2}{2} = \int \varphi M\,ds$; e daqui reſultará eſta nova equaçaõ differencial

$$\varphi P u\,du + \frac{P u^2\,d\varphi}{2} = \varphi M\,ds.$$

Comparando-a com a precedente, termo por termo, ſerá $\frac{P u^2\,d\varphi}{2} = \varphi n u^2\,ds$, ou $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{2n\,ds}{P}$. Logo $l\varphi = \frac{2ns}{P}$, e $\varphi = e^{\frac{2ns}{P}}$, ſendo e o numero que tem por logarithmo hyperbolico a unidade. Subſtituindo pois eſte valor de φ na equaçaõ $\frac{\varphi P u^2}{2} = \int \varphi M\,ds$, teremos

$$\frac{P u^2 . e^{\frac{2ns}{P}}}{2} = \int M\,ds . e^{\frac{2ns}{P}} = \frac{M . P}{2n} e^{\frac{2ns}{P}} + C.$$

E porque $s = 0$ deve dar $u = 0$, ſerá $C = -\frac{M . P}{2n}$, e conſeguintemente $u^2 = \frac{M}{n}\left[1 - e^{\frac{-2ns}{P}}\right]$. Porém tinhamos $f = n u^2$; logo

$$f = M\left[1 - e^{\frac{-2ns}{P}}\right];$$

106 He facil de ver por eſta formula, que f naõ póde ſer maior que M, mas ſomente igual, quando s for infinito; e como M he menor que P, ſempre f ſerá menor que P. Mas P he a preſſaõ cauſada pelo corpo em quanto ſuſtentado pelo fluido, e f he a preſſaõ que reſulta, quando actualmente deſce por elle. Logo a preſ-

ſaõ

ſaõ da atmosfera ſobre a ſuperficie da terra he menor, quando as gotas da chuva deſcem pelo ar, do que quando reſolvidas em partes tenuiſſimas ſaõ ſuſtentadas por elle. Eſta he pois huma cauſa demonſtrada das variações do barometro, mas naõ deve entender-ſe que ſeja unica, e excluſiva de outras. Dous ventos contrarios que ajuntaõ, e condenſaõ o ar para hum lugar, fallohaõ ahi mais pezado, e aſſim muitas outras cauſas, que ignoramos, e que naõ podem ſujeitar-ſe ao calculo.

107 Hum dos uſos mais importantes, para que póde ſervir o barometro, he a determinaçaõ da differença de livel de quaiſquer pontos ſituados em differentes elevações. Para ſe dar huma ſoluçaõ geral, e completa deſta queſtaõ, era neceſſario conhecer a lei que guardaõ entre ſi as denſidades de todas as camadas da atmosfera, attendidas todas as cauſas de que ellas dependem; mas diſſo naõ ha eſperanças. Conſiderando porém a compreſſaõ, que reſulta do proprio pezo do ar, que he a cauſa principal, e prefcindindo de tudo o mais, he facil de determinar a relaçaõ, que devem ter as differenças de livel com as alturas do mercurio no barometro.

108 Sendo pois o ar comprimido unicamente pelo ſeu proprio pezo, a gravidade eſpecifica, ou denſidade delle ſera proporcional ao pezo da colunna ſuperior; e aſſim repreſentando por P a gravidade eſpecifica em qualquer ponto, teremos n P por valor do pezo abſoluto da colunna, que o comprime neſſe lugar, ſendo n hum numero conſtante. Logo ſerá $n\,P = \int P\,dx$ (n. 75.), ou $n\,P = \int -P\,dx$, tomando x de baixo para cima. Differenciando eſta equaçaõ, teremos $n\,d\,P = -P\,dx$, ou $\frac{n\,d\,P}{P} = -dx$, e integrando $n\,l\,P = C - x$. Para determinarmos a conſtante C, ſupponhamos que na origem de x he a gravidade eſpecifica do ar $= p$, e teremos $C = n\,l\,p$. Logo $x = n\,l\,p - n\,l\,P = n\,l\,\frac{p}{P}$. Seja b a altura do mercurio no barometro no lugar onde a gravidade eſpecifica he $= p$, e H onde he $= P$; e teremos $\frac{p}{P} = \frac{b}{H}$. Subſtituindo

mindo eſte valor na equaçaõ, ſerá finalmente $x = n\, l \frac{b}{H}$ ..

109 Para uſar deſta formula, he neceſſario primeiramente determinar a quantidade n por duas obſervações do barometro, huma no lugar a reſpeito do qual ſe querem ſaber as differenças de livel, e outra em outro lugar cuja differença de livel ſeja conhecida immediatamente pela mediçaõ.

Exemplo I. Na montanha de *Chuſſai* no Reino do Peru obſervou M. Godin a altura do mercurio no barometro de 17 poll. e $10\frac{1}{2}$ linh., e M. Bouguer em *Caraburu* a obſervou de 21 poll. $2\frac{3}{4}$ linh.; pergunta-ſe a elevaçaõ da montanha a reſpeito de *Caraburu*.

Primeiramente ſobre a montanha *Pitchincha* 1208 toeſas mais elevada que *Caraburu* ſe obſervou a altura do mercurio de 15 poll. e 11. linh.; e aſſim teremos $x = 1208$, $b = \frac{1019}{4}$, $H = 191$, donde concluiremos $n = 9658$; e ſerá para todos os mais lugares a reſpeito de *Caraburu* $x = 9658\, l \frac{b}{H}$ ..

Como pois em *Chuſſai* temos $H = \frac{429}{2}$, ſerá $x = 9658\, l \frac{1019}{858} = 9658 . 0{,}0746869 = 721{,}3$ toeſas; reſultado, que concorda muito bem com o que ſe achou por huma medida geometrica.

Exemplo II. Na aldea *Alauſſy* ſituada na raiz da montanha de *Chuſſai* ſe obſervou a altura do mercurio de 21 poll. $1\frac{1}{4}$ linh.; pergunta-ſe a ſua poſiçaõ a reſpeito de *Caraburu*.

Neſte lugar temos $H = \frac{1013}{4}$, e conſeguintemente ſerá $x = 9658\, l \frac{1019}{1013} = 9658 . 0{,}0025648 = 24{,}78$ toeſas.

Se

Se tirarmos eſte reſultado do que achamos no exemplo precedente, ficará 696,5 toeſas por differença de livel entre *Alauſſy* e *Chuſſai*; reſultado que naõ differe mais que meia toeſa de 197 que M. Godin achou pela mediçaõ.

M. Bouguer ſe ſervio deſte methodo com bom ſuceſſo pelas eminencias das cordilheiras do Peru. E com effeito he facil de entender, que quanto maior for a altura, tanto mais ſe achará livre o ar das cauſas, que lhe alteraõ o equilibrio, e conſeguintemente tanto melhor ſe conformará com a lei das denſidades, que havemos ſuppoſto. Por eſta raſaõ ſe achou, que naõ correſpondia taõ bem eſte methodo nas partes inferiores das ditas cordilheiras, nem em outras montanhas de menor elevaçaõ na zona torrida, e muito menos nas de Europa. Aſſim naõ deveremos ſervirmos deſte meio, quando procurarmos reſultados exactos, ſenaõ com muita cautela, e precauçaõ.

110 Agora poderemos determinar a altura *E R* (Fig. 31.), em que o ar, que entra pelo orificio *E* na experiencia da bomba de Sevilha, ha de ſuſtentar no vacuo a colunna de agua *E F* (n. 86.). Eſtá claro, que ella ha de ſubir pelo tubo, até eſtar em equilibrio com a preſſaõ do ar, que lhe correſponder á ſua baſe. Supponhamos pois, que a colunna de agua *E F* he de 24 pés, equivalente a huma de mercurio de 21 pollegadas, e que no lugar da experiencia a preſſaõ da atmoſfera ſuſtenta huma colunna de agua de 32 pés, ou huma de mercurio de 28 pollegadas. Deſte modo ſerá reduzida a queſtaõ a buſcar a altura x, onde o mercurio no barometro ſe deve ſuſtentar em 21 pollegadas, e teremos $x = 96 \frac{28}{21} = 1206$ toeſas.

Eſta he a altura, a que deveria ſubir a colunna de agua, ſe a travez da ſua maſſa naõ deſſe paſſagem a quantidade nenhuma de ar para a parte ſuperior do tubo, e ſe naõ encontraſſe reſiſtencia nenhuma nas paredes delle.

Theorica das Bombas.

111 AS bombas ſaõ humas maquinas muito conhecidas, que ſervem para elevar a agua, nas quais a preſſaõ da atmoſfera he hum dos principais agentes.

tes. Em geral podem reduzir-ſe a treş eſpecies ; a ſaber, bomba aſpirante , bomba comprimente , e bomba aſpirante e comprimente ao meſmo tempo.

112 A bomba *aſpirante* (Fig. 37.) he compoſta de dous tubos verticais $AKBC$, $CBDQ$, unidos em CB ; o primeiro , que eſtá mergulhado na agua , chama-ſe *tubo de aſpiraçaõ* , e o ſegundo *corpo da bomba*. No lugar da juntura delles ſe poem ordinariamente hum diaphragma cylindrico , que vulgarmente chamaõ *nabo* , furado pelo meio , e cuberto com huma valvula E , que abre de baixo para cima , á qual ſe dá o nome de *chapeleta*. No corpo da bomba ſobe , e deſce alternativamente hum embolo , que chamaõ *Zoncho* , ou *buxa da bomba* , cuja haſte Z he movida por meio de huma alavanca , ou de qualquer outra maneira. A cabeça delle he furada tambem ſegundo a direcçaõ do eixo com hum buraco redondo t , que eſtá cuberto com outra chapeleta F , que ſe abre de baixo para cima. Eſte embolo corre no ſeu jogo hum certo eſpaço IT , de maneira que a ſua baſe inferior coincide com o plano horizontal IH , quando eſtá abaixado , e com o plano horizontal TS quando eſtá levantado.

113 He facil de entender o effeito deſta maquina. Supponhamos que no primeiro inſtante a baſe do embolo ſe acha em IH , e que o ar interior da bomba eſtá no meſmo gráo de compreſſaõ que o exterior , e conſeguintemente que as duas chapeletas E , F eſtaõ fechadas em virtude do proprio pezo. Entaõ , levantando o embolo para TS , a chapeleta F ficará fechada pelo ſeu pezo , e pela preſſaõ da atmoſfera que carrega ſobre ella ; o ar , que eſtava no eſpaço $ACIHBK$, ſe dilata , abre a valvula E , e occupa uniformemente o eſpaço $ACTSBK$; e a preſſaõ da atmoſfera ſobre a ſuperficie exterior da agua MN a faz ſubir pelo tubo de aſpiraçaõ , onde ſe acha hum ar mais rarefeito , até huma certa altura Aa. Depois , abaixando outra vez o embolo até IH , a valvula F ſe abre pela compreſſaõ do ar inferior ; a valvula E ſe fecha pelo ſeu pezo , e pela compreſſaõ do ar ſeperior ; e o ar do eſpaço $CIHB$ adquire a meſma denſidade do ar exterior. Levantando pois novamente o embolo , a valvula F ſe fecha : o ar do eſpaço $aCBk$ já rarefeito ſe dilata mais , abre a valvula E , e juntamente com o ar do eſpaço $CIHB$ occupa uniformemente o eſpaço $aCTSBk$;

e conſeguintemente a agua ſubirá mais no tubo de aſpiraçaõ huma quantidade $a a^{1}$, em virtude da preſſaõ exterior da atmosfera ſobre a ſuperficie $M N$. Continuando deſte modo o jogo do embolo, irá ſubindo a agua, chegará á baſe delle, paſſará pelo buraco t, e entaõ abaixo do embolo naõ haverá mais ar na bomba, mas o movimento das valvulas ſerá o meſmo que dantes, e a agua continuará a levantar-ſe pelo cano da bomba até ſahir pelo tubo lateral O.

114 Deve notar-ſe, que a altura $L M$ da ſuperficie da agua $M N$ até a baſe do embolo naõ póde ſer de mais que 32 pés (n. 85.); e na pratica, attendendo que nunca ſe póde evacuar perfeitamente o ar, e que o pezo da chapeleta inferior E he hum obſtaculo, que deve tambem ſer vencido pela preſſaõ da atmosfera, ſempre deve fazer-ſe $L M$ menor que 32 pés. Aqui ſuppomos ſempre que a preſſaõ da atmosfera faz equilibrio a huma colunna de agua de 32 pés, ou que o mercurio do barometro no lugar aonde eſtá ſituada a bomba, ſe ſuſtenta na altura de 28 pollegadas. Mas, ſe o barometro moſtrar maior, ou menor altura, ſerá neceſſario rectificar a colunna de agua equivalente, conforme ao que acima diſſemos (n. 46.), e ſubſtituir o ſeu valor exacto em todas as partes aonde pomos 32 pés.

115 Suppondo que a maquina eſtá bem conſtruida, a evacuaçaõ mais, ou menos completa do ar interior, depende da poſiçaõ mais, ou menos ventajoſa da valvula E. Eſta ſe coſtuma pôr ou em $A K$ hum pouco abaixo do livel $M N$ da agua exterior, ou mais ordinariamente na junta dos dous tubos, como na Fig. 37 ſe repreſenta. Vejamos, qual he a melhor poſiçaõ; e pelo exame deſtes dous caſos ſe julgará das poſições intermedias.

Em primeiro lugar ſupponhamos a valvula E em $A K$, e para maior ſimplicidade preſcindamos do ſeu pezo. Nos primeiros inſtantes, quando ſe levanta o embolo de I para T, a agua ſobe facilmente pelo tubo de aſpiraçaõ; mas depois, ſe a altura $L M$, poſto que menor que 32 pés, for algum tanto conſideravel, póde ſucceder que havendo chegado a agua a certa altura $A V$, e eſtando o embolo levantado em $T S$, ſeja a força elaſtica do ar incluido no eſpaço $V C T S B P$, juntamente com o pezo da colunna de agua $A P$, igual á preſſaõ da atmosfera; e entaõ

taõ, por mais que ſe jogue com o embolo, a agua naõ paſſará da altura actual em que ſe acha. E com effeito quando o embolo eſtá em IH, o ar do eſpaço $VCIHBP$ ſe reduz ao eſtado do ar exterior; e quando ſe levanta para TS, eſte ar ſe eſpalha pelo eſpaço $VCTSBP$. Aſſim, ſendo b a altura de huma columna de agua equivalente á preſſaõ da atmosfera, ou á força elaſtica do ar natural (n. 89.), ſerá a força elaſtica do ar dilatado no eſpaço $VCTSBP$ equivalente ao pezo de huma columna de agua, que tenha por altura $\frac{VCIHBP}{VCTSBP}\,b$ (n. 92.). Ajuntando-lhe a altura AV da agua elevada no tubo, a ſoma deve ſer igual a b, para que a agua naõ poſſa ſubir de VP, e teremos por equaçaõ deſte equilibrio

$$b = AV + \frac{VCIHBP}{VCTSBP}\,b.$$

116 Seja o raio do tubo de aſpiraçaõ $= r$, do corpo da bomba $= R$, $AC = a$, $CI = n$, $IT = p$, $AV = x$, e a raſaõ da circumferencia ao diametro $= c$; e teremos o cylindro $VB = c r^2 (a - x)$, $CH = c R^2 n$, $CS = c R^2 (p + n)$, e conſeguintemente o ſolido $VCIHBP = c r^2 (a - x) + c R^2 n$, e $VCTSBP = c r^2 (a - x) + c R^2 (p + n)$. Subſtituindo eſtes valores na equaçaõ precedente teremos

$$b = x + \frac{r^2 (a - x) + R^2 x}{r^2 (a - x) + R^2 (p + n)}\,b,$$

donde, fazendo $\frac{R^2}{r^2} = k$, ſe tirará

$$x = \frac{a + k(p + n) \pm \sqrt{[(a + k(p + n))^2 - 4kbp]}}{2}.$$

117 Todas as vezes pois que o valor de x for real, e menor que a, a agua deverá parar realmente no tubo de aſpiraçaõ; como havemos ſuppoſto no calculo. Logo naõ continuará a ſubir, ſenaõ quando for abſurdo o ſuppor que ella pára, iſto he, quando os valores de x ſahirem imaginarios. Logo he neceſſario, para a agua ſubir, que ſeja ſempre $4kbp > (a + k(p + n))^2$.

Seja, por exemplo, $b = 32$ pés, $a = 20$, $n = 2$, $p = 2$, e $k = 1$, iſto he, o diametro do tubo de aſpiraçaõ igual ao do corpo da bomba; e teremos $4 \cdot 32 \cdot 2$

$< (20 + 4)^2$. Logo a agua parará neſte caſo, na altura $AV = 3$ pés proximamente; e a bomba ſerá incapaz.

Seja $b = 32$ pés, $a = 25$, $n = 0$, $p = 2$, e $k = 4$; e teremos $4 . 32 . 4 . 2 < (25 + 8)^2$. Logo a agua parará tambem neſte caſo em huma altura $AV = 12\frac{1}{2}$ pés proximamente, e a bomba ſerá imperfeita. Porém, ficando todas as outras dimensões, ſe fizeſſemos $k = 6$, a agua naõ pararia, e a bomba poderia ſer admittida.

Pelo meſmo methodo poderemos ſegurarnos, ſe no caſo de chegar a agua ao corpo da bomba deverá parar em alguma parte entre os pontos C e I. E para applicar á formula precedente a eſte caſo naõ he neceſſario mais que fazer $k = 1$.

118 Todos eſtes calculos moſtraõ, que ſendo a valvula E poſta em AK, a altura do embolo acima do livel da agua deve ſer muito menor que de 32 pés, no caſo de ſe naõ dar ao meſmo embolo hum jogo IT muito grande, ou de ſe naõ dar ao tubo de aſpiraçaõ hum diametro muito pequeno, em comparaçaõ do corpo da bomba. Eſtes dous remedios tem ſeus inconvenientes, e ſobre tudo o ultimo, que póde diminuir muito o producto da bomba, e conſumir inutilmente grande parte da velocidade do agente; porque eſta deve ſer regulada de tal modo, que ſuba preciſamente pelo tubo de aſpiraçaõ tanta agua, quanta o embolo levanta quando ſobe pelo corpo da bomba, de maneira que naõ fique jamais vazio algum entre a baſe delle, e a agua que a ſegue.

119 Supponhamos agora, que a valvula E eſtá na junta dos dous tubos, como ſe repreſenta na Fig. 37. Logo ſe vê, que eſta diſpoſiçaõ tem a ventagem de ſe evacuar o ar interior quaſi completamente. Porque fazendo deſcer o embolo o mais perto que he poſſivel de CB, naõ ficará ar ſenaõ no pequeno eſpaço $CIHB$, e na pequena cavidade t. Entaõ póde ſer a altura LM de pouco menos que 32 pés; mas iſto ſuppoem, que as valvulas ſejaõ fieis, perfeiçaõ que ſe naõ acha na pratica, porque os couros de que ſe fazem as chapeletas ſecaõ-ſe, e ajuſtaõ mal, quando a maquina eſtá por algum tempo em inacçaõ. Eſte inconveniente naõ teria lugar, eſtando a valvula E em AK, porque ſempre ficaria mergulhada

na agua ; mas ſem embargo , conſideradas todas as couſas , vale mais polla em CB do que em AK.

120 Tomadas pois as precauções convenientes , para que a bomba preſte o ſeu effeito , examinemos a força que he neceſſaria para levantar o embolo. Supponhamos , que a agua tem já chegado á maior altura QD , e que o embolo eſtá no termo mais baixo IH. He manifeſto , que elle ſuſtenta a colunna de agua $IHDQ$, e a preſſaõ da atmosfera ſobre QD , a qual ſe póde ſuppor igual á que carrega ſobre MN. Aſſim , tomando as duas verticais XY, YM , cada huma de 32 pés , por alturas das colunnas de agua equivalentes ás preſsões da atmosfera ſobre QD, e MN , ſuſtentará o embolo a preſſaõ repreſentada por $IH \times XY$, e a colunna de agua $ACIHBK$ forçará a baſe delle IH de baixo para cima com huma preſſaõ repreſentada por $IH \times MY$ menos o pezo da meſma colunna , ou $IH \times LM$, iſto he , com huma preſſaõ repreſentada por $IH \times LY$. Tirando $IH \times LY$ de $IH \times XY$, ficará $IH \times LM$ por expreſſaõ da força que ſuſtenta o embolo , á qual ſe deve ajuntar o pezo da colunna $IHDQ$. Por tudo , ſerá pois carregado o embolo do pezo equivalente a huma colunna de agua , que tenha IH por baſe , e por altura a elevaçaõ da agua QD acima do livel MN ; e o meſmo ſe entenderá a reſpeito de qualquer outra poſiçaõ do embolo. Ajuntando a eſta força o pezo do meſmo embolo , a ſoma dará a força que ſe lhe deve applicar no eſtado ſimples do equilibrio ; mas para produzir o movimento , e vencer a fricçaõ , ſerá neceſſario ajuntar-ſe certa quantidade de força , que ordinariamente ſe avalîa em hum terço da que baſtaria para o equilibrio ; porem naõ he ſuſceptivel de determinaçaõ fixa , por ſer muito variavel conforme a conſtrucçaõ , e perfeiçaõ das maquinas , e conforme a velocidade que ſe pertende dellas.

121 Suppondo , que a bomba tem chegado a hum movimento uniforme e permanente , he facil de calcular o producto de agua , que com ella ſe póde tirar. Porque ſendo e o eſpaço , que anda o embolo em hum ſegundo quando ſobe , R o raio da ſua baſe , ou do corpo da bomba, e c a raſaõ da circumferencia ao diametro , levantará o embolo , e conſeguintemente dará a bomba em hum ſegundo cR^2e pollegadas cubicas de agua.

122 Mas deve notar-ſe, que ſendo pequena a altura YL, e ſubindo conſeguintemente a agua pelo corpo da bomba com pouca velocidade, he neceſſario regular de tal maneira a velocidade do embolo, que naõ ſe forme vazio entre a baſe delle, e a agua que a ſegue; porque de outra ſorte haveria força perdida na manobra da bomba. Ordinariamente ſe pecca contra eſta regra, e depois ficaõ em grande admiraçaõ de que huma bomba movida com grande velocidade naõ produza ſenſivelmente mais agua do que movida com menor velocidade. Por iſſo he neceſſario combinar de tal maneira as dimensões da bomba com o jogo do embolo, que ſe naõ conſumaõ as forças ſem utilidade. He facil de ver, que a agua em IH tende a ſubir com huma velocidade $= \frac{LY}{LM}$, e que outra tanta deve conſeguintemente dar-ſe ao embolo, para ſe empregar utilmente a força motriz.

123 Na bomba *comprimente* (Fig. 38.), o cano principal $ACBK$ eſtá mergulhado na agua MN, e o embolo entra por baixo, para levantar, ou comprimir a agua para cima, cuja haſte Z eſtá ſolidamente pregada na traveſſa bc do caixilho movel $abcd$, que alternativamente ſe faz ſubir e deſcer por meio de huma alavanca, ou de qualquer outra maneira. A cabeça do embolo he vazada, e tem o buraco cuberto com huma valvula F, que ſe abre de baixo para cima. Em VP, pouco abaixo do livel da agua exterior, ſe poem hum diaphragma fixo, igualmente vazado, e cuberto com huma valvula E, que ſe abre de baixo para cima. E ao corpo da bomba ſe une em CB o tubo conductor $CBOQ$, pelo qual ſe levanta a agua até o lugar do ſeu deſtino.

124 Para explicar o jogo deſta bomba, ſupponhamos que o embolo no primeiro inſtante eſtá no ponto mais baixo do eſpaço que deſcreve. Eſtá claro, que a agua, em virtude do proprio pezo, deve levantar as valvulas F, E, e ſubir pelo corpo da bomba até o livel MN; e quando tiver chegado a elle, ou ao menos, quando eſtiver cheio de agua o eſpaço comprehendido entre as valvulas, eſtas ſe fecharaõ pelo pezo que lhes reſta no fluido. Entaõ levantando o embolo, a valvula inferior F ficará fechada, a ſuperior E ſe abrirá, e a agua comprehendida entre

entre as duas valvulas ſerá forçada a levantar-ſe acima do livel *M N*. Abaixando outra vez o embolo, a valvula *E* ſe fechará, e embaraçará a deſcida da agua ſuperior, a valvula *F* ſe abrirá, e tornará a encher-ſe de agua o eſpaço comprehendido entre ellas. Eſta agua paſſará tambem para cima da valvula *E*, em ſe levantando o embolo; e aſſim por diante.

125 Por meio deſta bomba póde a agua levantar-ſe a qualquer altura, applicando-ſe a força competente. Eſta ſe calcúla, como na bomba aſpirante; e no eſtado do equilibrio ſuſtentará além do pezo do embolo, e da grade *a b c d*, o pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do embolo, e a altura igual á da agua levantada acima do livel do manancial. O producto do embolo ſe determina, como na aſpirante, ſem reſtricçaõ alguma.

126 A bomba *aſpirante e comprimente* (Fig. 39.) he compoſta de hum tubo de aſpiraçaõ *A C B K* mergulhado na agua *M N*; de hum corpo de bomba *C T S B*; e de hum tubo conductor *H L O Q*. Em *C B* e *V P* eſtaõ duas valvulas *E*, *F* que ſe abrem de baixo para cima; e o embolo naõ he vazado como nas outras, mas maciſſo, e joga no corpo da bomba ſem deſcer abaixo de *H Y*, para naõ tapar a entrada *H L* do tubo conductor.

Bem ſe vè, que fazendo ſubir e deſcer o embolo alternativamente, a agua ſobe primeiramente pelo tubo de aſpiraçaõ, e corpo de bomba, como na bomba aſpirante ordinaria, ſendo os movimentos das valvulas *E*, *F* abſolutamente os meſmos em ambos os caſos. Depois que a agua chega á baſe do embolo, he comprimida por elle quando deſce, e obrigada a ſubir pelo tubo conductor. Tornando-ſe a levantar, aſpira nova agua; e deſcendo a faz paſſar ao tubo conductor atraz da primeira; e aſſim por diante.

127 He facil de achar a força motriz neſta bomba, para o ſimples eſtado do equilibrio. Primeiramente, ſuppondo que pela aſpiraçaõ ſobe a agua até *t s*, he evidente que eſtando entaõ fechada a valvula *F*, a potencia applicada ao embolo ſuſtenta além do pezo delle huma parte do pezo da atmosfera, igual ao pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do meſmo embolo, e a altura igual á diſtancia vertical de *t s* ao livel *M N* da agua exterior. Em ſegundo lugar, quando deſce e com-

prime a agua, eſtando fechada a valvula *E*, ſuſtenta o pezo de huma colunna de agua que tem a meſma baſe que elle, e por altura a diſtancia da dita baſe ao plano horizontal que paſſa pelo ponto *Q*, onde a agua tem chegado. Neſte caſo o pezo do embolo ajuda a potencia.

128 Algumas vezes ſe diſpoem eſta bomba de maneira, que o embolo em lugar de aſpirar quando ſobe, e comprimir quando deſce, como na Fig. 39, comprime quando ſobe, e aſpira quando deſce, como na Fig. 40. Mas a força motriz ſe calcúla do meſmo modo em ambos os caſos.

129 Tais ſaõ as tres eſpecies primordiais de bombas, ás quais ſe reduziráõ ſempre todas as que ſe podem imaginar, e conſtruir. Por iſſo naõ podem aperfeiçoar-ſe realmente eſtas maquinas, ſenaõ procurando diminuir a fricçaõ quanto he poſſivel, empregando embolos bem feitos, valvulas muito fieis &c; no que ainda reſta hum campo dilatado á induſtria dos Artiſtas. As miudezas da conſtrucçaõ, e a eſcolha das materias proprias para formar as peças de huma bomba, naõ pertencem ao meu objecto. Póde ſobre iſſo conſultar-ſe a *Architectura Hydraulica* de Belidor, havendo cautela com a theorica que elle dá do mechaniſmo das bombas, porque he ſummamente defeituoſa.

130 Em qualquer das tres bombas, que havemos declarado, a ſahida da agua naõ he continua, mas intermittente. Para remediar eſte defeito, ha muitos annos que ſe coſtuma guarnecer o tubo conductor de huma caixa *RK* (Fig. 41.), que communica com o tubo interrompido em *G* e *H*, ſendo fechada exteriormente de todos os lados. Eſta caixa eſtá primeiramente cheia de ar na ſua denſidade natural. Depois, quando ſe anda com o embolo, a agua que ſobe pelo braço *CBDQ* ſe derrama em parte na caixa *RK*, e condenſa o ar nella incluido, cortando-lhe a communiçaçaõ com o ar externo, e reduzindo-o a ocupar ſómente o eſpaço *kryx*. Entaõ abaixando o embolo, o ar aſſim condenſado ſe dilata, forçando a agua a deſcer de *kr* até *KR*, e conſeguintemente a ſubir pelo braço *GHQD*. Continuando o meſmo jogo, ſubirá a meſma agua ſem interrupçaõ pelo referido braço, e a bomba deſaguará por conſeguinte com hum fluxo continuo, ao menos ſenſivelmente.

131 Algum

131 Alguns conſtructores imaginaõ erradamente, que a *caixa do ar* dobra o effeito deſta maquina. Devem reparar, que a bomba naõ póde dar mais agua do que levanta o embolo quando ſobe ; e que a força motriz , ſendo a velocidade conſtante , emprega ſempre a meſma acçaõ , quer levante a dita agua directamente até o lugar do ſeu deſtino , quer introduza parte della na caixa do ar , para dahi ſer levantada pela elaſticidade delle. Porque no ſegundo caſo he neceſſario comprimir o ar da caixa *KR*; e eſta força com a que ſe emprega em levantar a outra parte da agua pelo braço *GHQD* abſorbe a acçaõ inteira da força motriz , como no primeiro caſo. Donde ſe vê , que ſe por huma parte he o fluxo continuo quando ha caixa de ar, por outra he dobrada a velocidade com que a agua ſahe , quando o fluxo he intermittente ; e o producto he o meſmo em ambos os caſos , ſendo as outras couſas iguais. He pois inutil a caixa do ar nas bombas , que tem ſimpleſmente por objecto levantar a agua ; mas ſerá proveitoſa nas bombas , que ſervem para extinguir os incendios , porque hum fluxo continuo de agua apaga mais facilmente o fogo , do que ſendo interrompido , ainda que ſeja entaõ maior a ſua velocidade.

132 Mas ſem recorrer á caixa de ar , póde fazer-ſe huma bomba de fluxo continuo , ſegundo a idea de *M.* de la Hire (*Mem. de l' Acad.* 1716.) , que com ſucceſſo tem ſido executada por Thilaye e Quentin , Meſtres bombeiros de Ruaõ , os quais appreſentáraõ á Academia , cada hum ſua bomba conſtruida ſegundo o principio de M. de la Hire. A de Quentin conſta de hum corpo de bomba *CF* (Fig. 42.) , de dous tubos de aſpiraçaõ *H* , K , e de dous conductores *Nu* , *fgb* que a certa altura ſe unem em hum ſó. O corpo da bomba *CF* , e o tubo conductor *fgb* ſaõ diſpoſtos , como na bomba aſpirante e comprimente da Fig. 39. As quatro valvulas *de concha* *S*, *s*, *S'*, *s'* ſe abrem e fechaõ alternativamente duas a duas. Em *y z* e *m n* eſtaõ duas aberturas , pelas quais o corpo da bomba communica com os conductores. A haſte *z* do embolo paſſa por huma chapa de cobre *CB*; e nella deve mover-ſe de maneira , que o ar exterior naõ poſſa entrar de modo algum no corpo da bomba *CF*.

O effeito deſta maquina he facil de comprehender. Supponhamos , que o embolo no primeiro inſtante eſtá no ponto

ponto mais baixo *F*. Então, levantando-se até *m*, deixa atraz de si hum vazio; o ar inferior abre a valvula *S* em virtude da sua dilataçaõ; a preſſaõ da atmosfera obriga a agua a ſubir; e ao meſmo tempo o ar comprehendido entre a chapa *C B* e a baſe ſuperior do embolo levanta a valvula *s*, e ſahe por ella. Abaixando o embolo, fechaõ-ſe as valvulas *S* e *s*, e abrem-ſe as outras *S'* e *s'*, huma pela compreſſaõ da agua que o embolo faz entrar pela abertura *y z* no tubo *f g b*, e a outra pela dilataçaõ do ar que eſtá no tubo *H*, no eſpaço *N m*, e no eſpaço comprehendido entre a cabeça do embolo e a chapa *C B*; e aſſim por diante. Aſſim que o corpo da bomba eſtá todo cheio de agua, o embolo aſpira e comprime ao meſmo tempo, e o fluxo da agua deve ſer neceſſariamente continuo, ao menos ſenſivelmente. Na bomba de Quentin, para maior ſegurança da continuidade, ſe ajunta ao tubo *f g b* huma caixa de ar *A E*, que M. de la Hire naõ havia empregado. Os commiſſarios nomeados pela Academia acháraõ, que eſta bomba produzia muito bem o ſeu effeito.

133 Os tubos das bombas ſofrem algumas vezes forças muito conſideraveis. Quando ſaõ feitos de materias flexiveis, como de chumbo, de cobre, e ainda de ferro, achar-ſe-ha a eſpeſſura que devem ter, para naõ arrebentarem, por meio da theorica que demos no Cap. I. (n. 53.).

134 Para dar movimento ás bombas, uſa-ſe de toda a eſpecie de agentes, como de homens, cavallos, correntes de aguas &c, conforme as circunſtancias. Quando he neceſſario elevar grande quantidade de agua, á proporçaõ ſe aumenta a força motriz; e para que ella exercite continuamente o meſmo esforço, formaõ-ſe muitas ordens de bombas de maneira, que ſuba huma parte dos embolos, quando deſce a outra.

Na Fig. 43, *M N B* he huma manivella vertical, movida ao redor do ſeu eixo pela potencia P, que por meio das duas cadeias *V* e *T* faz jogar alternativamente ao redor dos ſeus eixos *C* e *E* os dous quartos de circulo verticais *A C O*, e *G E F*, aos quais ſaõ applicadas as cadeias *S* e *H* dos embolos de duas bombas, que ſe levantaráõ e abaixaráõ alternativamente, guardando ſempre a meſma poſiçaõ vertical.

Na

Na Fig. 44 ſe repreſenta huma manivella horizontal, deſtinada a mover os embolos de duas bombas. As cadeias *S*, e *H* vaõ paſſar por duas roldanas fixas *A*, *O* que mantém os embolos em huma direcçaõ ſempre vertical; e a manivella he movida por huma roda, que a corrente da meſma agua faz andar.

135 Huma das invençoens mais ingenhoſas neſta parte, foi a applicaçaõ que no principio deſte ſeculo ſe começou a fazer do vapor da agua, para dar movimento ás bombas. Por experiencias continuas ſe ſabe, que a agua expoſta á acçaõ do fogo ſe dilata, e lança de ſi em fórma de vapor hum fluido muito ſutil e elaſtico, capaz de vencer grandes obſtaculos. Fazendo pois ferver a agua em huma caldeira *AMNE* (Fig 45.) debaixo do cylindro vazio *ACDE*, guarnecido de hum embolo movel P, o vapor della paſſando pela abertura *mn* obrigará o embolo a ſubir, vencendo a preſſaõ da atmoſfera que carrega ſobre elle; e para ſer o movimento mais vivo ſe ajuda com hum pezo *B* applicado á extremidade *H* da alavanca *HO* apoyada em *T*. Havendo chegado o embolo á altura dezejada, ſe o vapor ſe condenſar ſubitamente pela injecçaõ de agua fria, introduzida pelo regiſto *R*, ou de qualquer outra maneira, far-ſe-ha hum vazio no eſpaço que era occupado pelo meſmo vapor. Entaõ a preſſaõ da atmoſfera, que ſupponho maior que o pezo *B*, carregando ſobre o embolo o fará deſcer; e aſſim por diante.

136 O pezo *B* deve ſer regulado de maneira, que o embolo ſuba e deſça com igual velocidade. Supponhamos pois $OT = A$, $HT = a$, a baſe do embolo $= b^2$, a altura da columna de agua que tendo a baſe b^2 equivale á preſſaõ do vapor contra a baſe do embolo $= H$, e a altura de outra columna de agua da meſma baſe equivalente á preſſaõ da atmoſfera ſobre o embolo $= b$. Eſtá claro, que o movimento ſerá uniforme, quando tivermos a equaçaõ

$$A(Hb^2 - bb^2) + Ba = Ab^2 - Ba$$

e por conſeguinte $B = \frac{Ab^2(2b - H)}{2a}$.

Seja por exemplo $A = a$, $H = b$; e acharemos $B = 16b^2$, iſto he, deverá o pezo *B* ſer igual ao de huma columna de agua, que tem por baſe b^2, e por altura 16 pés.

137 Aſ-

137 Aſſim conſiſte todo o mechaniſmo deſte movimento na dobrada acçaõ do vapor da agua, e da preſſaõ da atmosfera; e para ſe fazer de huma maneira continua, he neceſſario que o meſmo movimento da maquina abra o regiſto da injecçaõ a ſeu tempo, como ſe póde executar de muitas maneiras. A deſcripçaõ da Maquina que em Freſne ſerve de eſgotar a agua das minas de carvaõ póde verſe no tomo 1º do noſſo Original deſde a pag. 125 até 139.

CAPITULO III.

Do equilibrio dos fluidos com os ſolidos.

138 A Superficie de hum ſolido mergulhado em qualquer fluido he comprimida por elle em todos os ſeus pontos da meſma maneira, e pela meſma raſaõ que ſaõ comprimidas as paredes dos vaſos, em que os meſmos fluidos ſe contém. De todas eſtas preſſoens reſulta huma força, que tende a levantar o corpo, a qual naõ póde ſer deſtruida, ſenaõ pelo pezo delle, ou por hum agente exterior, ou pelo concurſo de huma e outra cauſa. Para examinarmos as condiçoens deſte equilibrio, he neceſſario trazer á lembrança a propoſiçaõ ſeguinte.

139 *Se no meio de cada hum dos lados* EA, AB, BC, CD, DE *de hum polygono inflexivel* (Fig. 46.) *ſe applicarem perpendicularmente as potencias* P, Q, R, S, T *proporcionais aos meſmos lados, e dirigidas todas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, no plano do polygono, eſtas potencias eſtaraõ em equilibrio.*

Porque, como duas forças concurrentes em hum ponto, e a ſua reſultante que paſſa neceſſariamente pelo meſmo ponto, podem ſer repreſentadas pelos lados de hum triangulo perpendiculares cada hum a cada huma das ditas forças, eſtá claro que tirando as diagonais BE, BD, e ſendo as duas forças P, Q perpendiculares e proporcionais aos lados EA, AB do triangulo EAB, deve a reſultante dellas, que chamaremos X, ſer perpendicular e proporcional ao lado BE do meſmo triangulo. E porque eſta força X deve paſſar pelo ponto de concurſo a das componentes P, Q, que he evidentemente o centro do circulo circumſcrito ao triangulo EAB, deve a meſma força

força *X* ſer perpendicular ao meio da corda *B E*. Do meſmo modo ſe moſtra, que as duas forças *T*, *X* daõ huma reſultante *Y* proporcional a *B D*, e perpendicular ao meio de *B D*; e que as duas forças *R*, *S* daõ huma reſultante *Z* proporcional a *B D*, e juntamente perpendicular ao meio de *BD*. Logo as duas reſultantes finais ſaõ iguais entre ſi; e porque ſuppomos que todas as forças obraõ de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, as meſmas reſultantes ſeraõ directamente contrarias. Logo ſeraõ mutuamente deſtruidas; e por conſeguinte o ſyſtema de todas as forças eſtará em equilibrio.

140 A demonſtraçaõ ſerá ſempre a meſma, qualquer que ſeja a poſiçaõ e o numero dos lados do polygono. Donde ſe ſegue em geral, que *ſe a cada hum dos elementos do perimetro inflexivel de huma figura rectilinea, curvilinea, ou mixtilinea, forem applicadas perpendicularmente, e no meſmo plano da figura, forças proporcionais aos meſmos elementos, e todas dirigidas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, eſtas forças eſtaraõ em equilibrio.*

141 Iſto ſuppoſto, imaginemos que a parte do corpo mergulhada na agua ſe divide em huma infinidade de ſecçoens por planos horizontais, e que a ſuperficie convexa de cada huma das ſecçoens ſe divide em infinitos trapezios por planos verticais, e perpendiculares aos meſmos trapezios. Seja *M N Y Z* (Fig. 47.) a baſe de huma deſtas ſecçoens, e *M a* a baſe de hum dos trapezios de que ſe compoem a ſuperficie convexa della, o qual trapezio chamaremos *X*. Pelo ponto *M* (Fig. 48.) conduza-ſe o plano *A M D B* vertical, e perpendicular ao trapezio *X*, cuja interſecçaõ com o plano horizontal *M N Y Z* ſerá a recta *M Y* perpendicular ao elemento *M a*; pelo ponto *m* infinitamente perto de *M* conſidere-ſe hum plano horizontal *m y*, que repreſenta a baſe ſuperior da ſecçaõ propoſta; e do ponto *M* levante-ſe a vertical *M P* até a ſuperficie do fluido *A B*.

Tomando pois a gravidade eſpecifica do fluido por unidade, já ſabemos que o trapezio *X* que tem *M a* por baſe, e *Mm* por altura, ſerá comprimido perpendicularmente por huma força $MF = Ma.Mm.MP$ (n. 39.). Reſolvendo-a em duas, huma horizontal *M E*, e outra vertical *MG*, os triangulos ſemelhantes *M H m*, *M E F*, nos daraõ

daraõ $ME = MF \frac{MH}{Mm}$, e EF, ou $MG = MF \frac{Hm}{Mm}$; e ſubſtituindo o valor de MF, teremos $ME = Ma.MP.MH$, e $MG = Ma.MP.Hm$. Pelo que reſpeita pois ás forças horizontais, como $MP.MH$ he conſtante para cada ſecçaõ, eſtá claro que ſaõ proporcionais aos elementos Ma, e conſeguintemente eſtaraõ em equilibrio (n. 140.), iſto he, teremos $\int Ma.MP.MH = 0$. E pelo que reſpeita ás forças verticais, he evidente que $\int Ma.Hm.MP$ repreſenta o volume do fluido, cujo lugar he occupado pelo corpo. Logo,

1.º A ſoma, ou a reſultante das forças verticais, com que o fluido tende a levantar o corpo, he igual á ſoma dos pequenos pezos elementares, de que ſe compoem o pezo total do fluido deslocado pelo meſmo corpo.

2.º As direcçoens deſtas duas forças coincidem em huma meſma linha vertical; porque as direcçoens das ſuas forças elementares correſpondentes eſtaõ em huma meſma vertical. Donde concluiremos, que o esforço, com que o fluido tende a levantar o corpo, paſſa pelo centro de gravidade do volume do fluido deslocado, ou pelo centro de gravidade da parte do corpo mergulhada nelle, e conſiderada como homogenea.

142 Logo, ſe hum corpo deixado á acçaõ da gravidade, eſtiver ſuſtentado em equilibrio ſobre hum fluido, deveráõ neceſſariamente ter lugar ao meſmo tempo as duas condiçoens ſeguintes.

I. *O pezo do corpo deve ſer igual ao pezo do fluido, cujo lugar occupa*; porque para haver equilibrio he neceſſario, que o pezo do corpo ſeja igual á força, que tende a levantallo verticalmente.

II. *O centro de gravidade do corpo, e o da parte mergulhada no fluido, conſiderada como homogenea, devem eſtar em huma meſma linha vertical*; porque para haver equilibrio he neceſſario que as forças naõ ſómente ſejaõ iguais, mas tambem directamente oppoſtas.

143 Donde ſe ſegue, que *toda a figura plana homogenea, dividida em duas partes iguais e ſemelhantes por hum eixo ſuppoſto vertical; e todo o ſolido de revoluçaõ homogeneo ſituado verticalmente, naõ ſendo de maior gravidade eſpecifica que o fluido, ſe ſuſtentaráõ em equilibrio neſta poſiçaõ.* Porque eſtá claro, que neſtes termos o pezo da figura

gura, ou do corpo, he ſuſtentado verticalmente pela força vertical do fluido, e que o centro de gravidade da figura, ou do ſolido, e o da parte mergulhada eſtaõ ambos na meſma linha vertical.

He de advertir, que a inverſa deſta propoſiçaõ naõ he verdadeira geralmente; iſto he, ſe hum corpo homogeneo, dividido em partes ſymmetricas pelo ſeu eixo, eſtiver em equilibrio ſobre hum fluido, naõ ſe ſegue que o eixo eſteja vertical; porque como adiante veremos, o meſmo corpo póde ter outras ſituaçoens de equilibrio.

144 Segue-ſe tambem, que *todo o corpo priſmatico homogeneo, que tem o eixo horizontal, eſtará em equilibrio ſobre hum fluido, quando o centro de gravidade da ſecçaõ feita pelo meio delle parallelamente ás baſes, eſtiver na meſma vertical com o centro de gravidade da parte mergulhada da meſma ſecçaõ.* Porque os centros de gravidade do priſma, e da parte mergulhada coincidem manifeſtamente com os centros da referida ſecçaõ.

145 Seja M o volume de hum corpo, N a parte delle mergulhada no fluido, P a ſua gravidade eſpecifica, e p a do fluido. Pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $PM = pN$. Donde ſe ſegue,

1.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for igual á do fluido, o corpo ſe mergulhará todo, e ficará indifferente para eſtar em equilibrio em qualquer profundidade; porque entaõ temos $M = N$.

2.º Que ſe a gravidade eſpecifica do fluido for maior que a do corpo, eſte ſerá ſuſtentado por aquelle; porque entaõ he $N < M$.

3.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for maior que a do fluido, o corpo naõ ſerá ſuſtentado, mas deſcerá por elle; porque entaõ temos $PM > pN$.

146 Suppondo, que o corpo he ſuſtentado pelo fluido, a equaçaõ $PM = pN$ nos dará $P : p :: N : M$, iſto he, *a gravidade eſpecifica do corpo he para a do fluido, como o volume da parte mergulhada para o volume total do corpo.*

147 Pela meſma equaçaõ ſe vê, que conhecendo ſimpleſmente o pezo abſoluto do corpo, e a gravidade eſpecifica do fluido, ſe póde calcular a parte mergulhada. Supponhamos que o corpo peza 20 libr., que eſtá ſuſtentado em equilibrio ſobre a agua, e que hum pé cubico de agua peza 70 libr. Pela hypotheſe ſerá $PM = 20$ libr., e con-

e conſeguintemente $N = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$ de hum pé cubico $= 493\ \frac{5}{7}$ pollegadas cubicas.

148 Se aumentarmos, ou diminuirmos huma quantidade ao volume N mergulhado no fluido, ſerá neceſſario para conſervar o equilibrio, que ajuntemos ou tiremos ao pezo total do corpo hum pezo q de maneira, que tenhamos $PM \pm q = pN \pm pn$, ou $q = pn$. Donde ſe vê, que o pezo additivo, ou ſubtractivo deve ſer igual ao pezo do volume n do fluido, que o corpo ha de deslocar de mais ou de menos, do que no primeiro eſtado.

149 Eſta força, com que os fluidos ſuſtém os corpos boyantes, he hum meio de grande utilidade para tirar grandes pezos do fundo dos rios, e do mar. Toma-ſe hum batel de grande volume, que ſe faz mergulhar, carregando-o quanto he poſſivel. Neſte eſtado ſe prende fortemente ao pezo, que ſe quer levantar; e então ſendo deſcarregado, o esforço vertical do fluido o faz ſubir, e com elle o pezo pertendido, com huma força que no primeiro inſtante he igual ao pezo de que o batel houver ſido deſcarregado.

150 Suppondo agora, que o corpo M he eſpecificamente mais grave que o fluido, e ſendo Q o pezo que he neceſſario applicar ao braço de huma balança para o ſuſtentar, depois de ſer inteiramente mergulhado no fluido; eſtá claro, que reſtando-lhe então o pezo $PM - pM$, devemos ter $Q = PM - pM$, ou $PM - Q = pM$, ou $P(PM - Q) = Ppm$, donde ſe tira $P : p :: PM : PM - Q$. Logo *a gravidade eſpecifica do corpo he para a do fluido, como o pezo abſoluto do corpo para o pezo que perde dentro do fluido.*

Aſſim, conhecendo a gravidade eſpecifica do corpo, he facil de conhecer a do fluido, e reciprocamente. Mas deve notar-ſe, que pezando hum corpo no ar contra outro mergulhado em hum fluido, o primeiro parece mais leve do que he na realidade, porque tambem perde no ar alguma parte do ſeu pezo. Eſta he muito pequena, e ordinariamente ſe póde deſprezar ſem erro ſenſivel. Querendo porém toda a exacçaõ poſſivel, far-ſe-ha a operaçaõ

raçaõ no recipiente da maquina pneumatica, ou calcular-ſe-ha o pezo de hum volume de ar igual ao do corpo, e ſe ajuntará ao pezo obſervado do meſmo corpo.

151 Quando he dada a gravidade eſpecifica do fluido, immediatamente ſe pode conhecer o volume do ſolido pela equaçaõ $p M = P M - Q$, que dá $M = \frac{P M - Q}{p}$. Se o pezo do corpo he, por exemplo, de 20 libr. e na agua de 10 libr. teremos $P M = 20$, $Q = 10$, e $M = \frac{20 - 10}{70} = \frac{1}{7}$ de hum pé cubico. Conhecido o volume do corpo, e o ſeu pezo abſoluto, facilmente ſe deduzirá a ſua gravidade eſpecifica, ſuppondo ſempre que he homogeneo, e que naõ tem cavidades interiores.

152 Se o meſmo ſolido M ſe mergulhar totalmente em outro fluido, que tenha a gravidade eſpecifica p', e ſe para o ſuſtentar for neceſſario o pezo Q', teremos as duas equações $Q = P M - p M$, $Q' = P M - p' M$, as quaes daõ $p (P M - Q') = p' (P M - Q)$, e conſeguintemente $p : p' :: P M - Q : P M - Q'$. Logo *as gravidades eſpecificas de dous fluidos ſaõ entre ſi, como os pezos que nelles perde hum meſmo corpo eſpecificamente mais grave que qualquer delles.*

153 Se no meſmo fluido, cuja gravidade eſpecifica he p, ſe mergulharem dous ſolidos que tenhaõ os volumes M, M', e as gravidades eſpecificas P, P', e ſe inteiramente mergulhados conſervarem os pezos Q, Q'; teremos $Q = P M - p M$, e $Q' = P' M' - p M'$. Donde ſe tira $M : M' :: P M - Q : P' M' - Q'$, iſto he, *os volumes dos corpos ſaõ na raſaõ dos pezos que perdem no meſmo fluido.*

154 Daqui ſe póde reſolver o problema, que o Rey Hieron propoz a Archimedes, ſobre a coroa de ouro, em que havia ſuſpeitas de ter o Ourives metido huma quantidade de prata. Seja C o pezo abſoluto da coroa, e K o pezo que perde na agua, x a quantidade de prata que contém, e conſeguintemente $C - x$ a quantidade de ouro. Supponhamos que hum volume dado M de ouro perde na agua o pezo P, e que hum volume dado de prata m perde o pezo p; e acharemos que o volume

me de ouro $C-x$ deverá perder o pezo $\frac{P(C-x)}{M}$, e o volume de prata x o pezo $\frac{px}{m}$ (n. 153.). Logo teremos $\frac{P(C-x)}{M}+\frac{px}{m}=K$, e conſeguintemente ſerá $x=\frac{m(MK-PC)}{Mp-mP}$.

155 Ainda que as analogias, que havemos moſtrado (n. 150. e 152.), ſaõ os meios mais exactos para achar as gravidades eſpecificas dos fluidos, com tudo na pratica ſe uſa muitas vezes de hum inſtrumento, que chamaõ *areometro*, ou *péza-licor*, por ſer a operaçaõ mais ſimples. A forma deſte inſtrumento he arbitraria; com tanto que divida facilmente o fluido quando ſe mergulha nelle, e que ſe mantenha em huma ſituaçaõ vertical. O de Fahrenheit tem eſtas propriedades.

He eſte compoſto de hum tubo cylindrico comprido CD (Fig. 49.), e de duas bolas ocas A, B; na mais baixa e mais pequena B ſe lança mercurio, ou qualquer materia pezada, que ſirva de *laſtro* ao inſtrumento, e lhe dê eſtabilidade; e a outra maior A, ſempre metida no fluido, ſerve de levantar o centro de gravidade da parte do areometro mergulhada no fluido, e deſſe modo lhe aumenta a eſtabilidade. Eſte inſtrumento póde moſtrar as gravidades eſpecificas dos fluidos, ou fazendo-o ſempre mergulhar a huma meſma profundidade, por meio de pezos com que ſe carrega; ou conſervando-o ſempre com o meſmo pezo, e deixando-o mergulhar livremente a differentes profundidades. Examinemos brevemente ambos os caſos.

Supponhamos, que o areometro ſe mergulha até o ponto M em dous fluidos differentes. Sejaõ P, e $P\pm q$ os pezos abſolutos que para iſſo deve ter, p e p' as gravidades eſpecificas dos fluidos, e M o volume da parte conſtante do areometro $MABN$; e teremos $P=pM$, e $P\pm q=p'M$ (n. 145.). Logo $p'=\frac{p(P\pm q)}{P}$.

Querendo porém que o areometro conſerve ſempre o meſmo pezo, ſejaõ K e M os pontos até onde elle ſe mergu-

mergulha, e repreſentando o ſeu pezo conſtante por P, os volumes $KABH$ e $MABN$ por M e M', e as gravidades eſpecificas dos fluidos por p e p'; teremos $P = pM$, e $P = p'M'$. Logo $p' = \frac{pM}{M'}$.

Sendo o areometro de huma figura regular, e conhecida, podem determinar-ſe os volumes M e M' pelas regras da Geometria; mas a forma do inſtrumento naõ permitte uſar-ſe deſte meio com exactidaõ. O melhor he graduallo experimentalmente, mettendo-o com differentes pezos conſecutivos em hum fluido de gravidade eſpecifica conhecida, e determinando aſſim os volumes correſpondentes, que elle mergulha no fluido (n. 147.).

Agora paſſemos ao exame particular da ſituaçaõ, que deve tomar huma figura boyante ſobre hum fluido, para ſatisfazer ás condições do equilibrio; objecto util em muitas occaſiões, e ſobre tudo na Architectura naval.

156 Probl. I. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo ESG ſobre o fluido MN, ſuppondo que naõ tem mais que hum angulo S mergulhado nelle* (Fig. 50.).

Tirem-ſe as rectas SP, SQ do angulo S para os pontos P e Q no meio das baſes EG, MN dos dous triangulos ESG, MSN, e nellas tomem-ſe as partes $SR = \frac{2}{3}SP$, e $SO = \frac{2}{3}SQ$, que determinaõ os centros de gravidade dos dous triangulos. Conduzaõ-ſe as rectas RO, PQ, que ſeraõ parallelas entre ſi, e perpendiculares a MN, porque RO deve ſer vertical. Do ponto P tirem-ſe PA, PD perpendiculares aos lados SE, SG produzidos ſe for neceſſario, e conduzaõ-ſe as rectas PM, PN que ſeraõ iguais, por ſer $QM = QN$, e PQ perpendicular a MN.

Iſto poſto, ſeja $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, o angulo $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade eſpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$. Porque os dous triangulos ESG, MSN, que tem o angulo commum S, ſaõ entre ſi como os productos $SE \times SG$, $SM \times SN$, pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = p'xy$.

E porque os triangulos rectangulos PAS, PDS dão $PA = c\,sen\,m$, $SA = c\,cos\,m$, $PD = c\,sen\,n$, $SD = c\,cos\,n$, e por conſeguinte $AM = c\,cos\,m - x$, $DN = c\,cos\,n - y$, teremos $PM^2 = (c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2$, e $PN^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$. Logo pela ſegunda condiçaõ do equilibrio teremos $(c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$, ou $xx - 2cx\,cos\,m = yy - 2cy\,cos\,n$. E ſubſtituindo o valor de $y = \frac{pab}{p'x}$, reſultará a equaçaõ

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpabx\,cos\,n}{p'} - \frac{p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

cujas raizes combinadas com a equaçaõ $y = \frac{pab}{p'x}$ daráõ a conhecer as differentes poſições do triangulo, que admittem equilibrio.

157 Pela regra de Deſcartes ſe ſabe, que em huma equaçaõ, cujas raizes ſaõ reais, ha tantas poſitivas quantas ſaõ as mudanças dos ſinais + e −, e tantas negativas quantas vezes ſe achaõ conſecutivos dous ſinais +, ou dous ſinais −. Por quanto pois falta na noſſa equaçaõ o termo que deveria ter x^2, he facil de ver que ſe todas as ſuas raizes ſaõ reais, deveráõ ſer neceſſariamente tres poſitivas, e huma negativa. A negativa naõ póde ſervir, porque naõ ſuppomos que MS ſeja produzida alem do ponto S. As poſitivas moſtraõ tres poſições reais de equilibrio, com tanto que ſeja $x < a$, e $y < b$.

158 Para darmos huma applicaçaõ mais ſimples da noſſa equaçaõ geral, ſupponhamos que he iſoſceles o triangulo ESG. Neſte caſo temos $a = b$, $n = m$, e a equaçaõ ſerá

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpa^2x\,cos\,m}{p'} - \frac{p^2a^4}{p'^2} = 0,$$

a qual ſe reſolve em duas do ſegundo gráo

$$x^2 - \frac{a^2p}{p'} = 0$$

$$x^2 - 2cx\,cos\,m + \frac{a^2p}{p'} = 0.$$

A primeira deſtas dá $x = \pm a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, ou ſimplesmente $x = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, porque a raiz negativa he inutil. E porque temos neſte caſo $y = \frac{p\,a^2}{p'x}$, ſerá tambem $y = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$; logo $y = x$, e conſeguintemente he tambem iſoſceles o triangulo MSN, ou (que vem a ſer o meſmo) a baſe do triangulo propoſto he parallela á ſuperficie do fluido em huma das ſituações de equilibrio.

A ſegunda dá $x = c\,cof\,m \pm \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $y = \frac{p\,a^2}{p'x}$, teremos

$$y = \frac{p\,a^2}{p'\left(c\,cof\,m \pm \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}\right)} =$$

$c\,cof\,m \mp \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$; e eſte ſegundo caſo dará as duas combinações ſeguintes

$$\begin{cases} x = c\,cof\,m + \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\,cof\,m - \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\,cof\,m - \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\,cof\,m + \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}, \end{cases}$$

as quais moſtraõ duas ſituações novas de equilibrio, quando os valores de x e y ſaõ reais, e cada hum delles menor que a. Para que eſtas duas condições tenhaõ lugar, he neceſſario 1°, que ſeja $\frac{a^2 p}{p'} < (c\,cof\,m)^2$, ou $\frac{p}{p'} <$

$\frac{(c\,cos\,m)^2}{a^2}$. 2°, que seja $a > c\,cos\,m + \sqrt{[(c\,cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}]}$, ou $\frac{p}{p'} > \frac{2\,a\,c\,cos\,m - a\,a}{a\,a}$.

Se o triangulo proposto for por exemplo equilateral, teremos $c\,cos\,m = \frac{3}{4}\,a$; e o triangulo, além da situaçaõ de equilibrio indicada pela primeira equaçaõ, poderá ter outras duas, com tanto que seja $\frac{p}{p'} < \frac{9}{16}$, e $\frac{p}{p'} > \frac{8}{16}$, isto he, com tanto que o valor de $\frac{p}{p'}$ seja comprehendido entre os limites das fracções $\frac{9}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

159 Probl. II. *Achar a situaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo SEG sobre o fluido MN, supposto que os dous angulos E, G estaõ metidos nelle* (Fig. 51.).

A soluçaõ do problema precedente póde accommodar-se a este, imaginando a Fig. 50 virada de baixo para cima; mas para maior clareza, daremos a soluçaõ directamente. Para isso advertiremos, que os tres centros de gravidade do triangulo SEG, do trapezio $MNGE$, e do triangulo SMN estaõ sempre na mesma linha recta: mas para haver equilibrio he necessario que o centro de gravidade do triangulo SEG e o da parte mergulhada $MNGE$ estejaõ em huma mesma vertical; logo os centros de gravidade dos dous triangulos SEG, SMN estaráõ tambem na mesma vertical.

Feita pois a construcçaõ, como no Problema antecedente, igualmente teremos $PM = PN$, e fazendo $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade especifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$; teremos $SEG : SMN : SE \times SG : SM \times SN$, e consequintemente $SEG - SMN$, ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$; donde se tira $EMNG = \frac{SEG\,(SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG} = \frac{SEG\,(ab - xy)}{ab}$.

Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = p'(ab - xy)$.

Pela

Pela ſegunda, acharemos juſtamente como no problema antecedente $xx - 2cx\,cof\,m = yy - 2cy\,cof\,n$; e eliminando y por meio da equaçaõ precedente, teremos finalmente

$$x^4 - 2cx^3\,cof\,m + \frac{2c(p'-p)abx\,cof\,n}{p'} - \frac{(p'-p)^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

ſobre cujas raizes faremos as meſmas reflexões; e combinando-as com a equaçaõ $pab = p'(ab - xy)$, determinaremos as differentes ſituações, em que he poſſivel o equilibrio.

16o Se o triangulo for iſoſceles, a equaçaõ precedente ſe reſolverá em duas do ſegundo gráo, a ſaber

$$x^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p} = 0$$

$$x^2 - 2cx\,cof\,m + \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$, e $y = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$; moſtrando que o triangulo tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando a baſe EG eſtá horizontal. E a ſegunda dá eſtas duas combinações

$$\begin{cases} x = c\,cof\,m + \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\,cof\,m - \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\,cof\,m - \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\,cof\,m + \sqrt{\left[(c\,cof\,m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]}, \end{cases}$$

aſ quais repreſentaõ outras duas poſições de equilibrio, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} > \frac{a^2-(c\,cof\,m)^2}{a^2}$, e $\frac{p}{p'} < \frac{2a^2-2ac\,cof\,m}{a^2}$. Por exemplo, ſe o triangulo for equilatero, e conſeguintemente $c\,cof\,m = \frac{3}{4}a$; haverá tres ſituações de equili-

brio, todas as vezes que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſe achar entre os limites de $\frac{7}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

161 PROBL. III. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo BHSK, ſuppondo que naõ tem mais que hum angulo S mergulhado no fluido* (Fig. 52.).

Conduzindo do ponto S para o meio de MN a recta SQ, e tomando $SO = \frac{2}{3} SQ$, ſerá O o centro de gravidade do triangulo MSN. E porque o centro de gravidade do rectangulo eſtá na interſecçaõ R das diagonais BS, HK, a recta RO deverá ſer vertical, ou perpendicular a MN. Tome-ſe $RP = \frac{1}{2} SR$, e conduza-ſe PQ que ſerá parallela a RO, e conſeguintemente perpendicular ao meio de MN, donde ſe ſegue que ſaõ iguais as rectas PM, PN. Em fim do ponto P tirem-ſe as rectas PA, PD perpendiculares a SH, SK reſpectivamente.

Iſto poſto, ſeja $SH = a$, $SK = b$, $SM = x$, $SN = y$, o pezo eſpecifico do rectangulo $= p$, o do fluido $= p'$; e pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = \frac{p'xy}{2}$.

E porque $SP = \frac{3}{4} SB$, teremos $PA = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} b$, $PM^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4} a - x\right)^2$, e $PN^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4} b - y\right)^2$. Logo, pela ſegunda condiçaõ do equilibrio, teremos $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$. Comparando eſta equaçaõ com a precedente, e eliminando y, acharemos finalmente a equaçaõ

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{p'} - \frac{4p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

por meio da qual ſe determinaráõ as differentes ſituaçoes

ções de equilibrio do rectangulo propoſto.

162 Se o rectangulo for hum quadrado, teremos $a = b$, e a equaçaõ precedente ſe reſolverá nas duas ſeguintes

$$x^2 - \frac{2p\,a^2}{p'} = 0,$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2p\,a^2}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, e conſeguintemente $y = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, por onde ſe moſtra que o quadrado tem huma poſiçaõ de equilibrio, quando a ſua diagonal HK eſtá horizontal, como he evidente por ſi meſmo; e a ſegunda dá

$$x = \frac{1}{4}a\left[3 \pm \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}a\left[3 \mp \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right],$$

donde reſultaõ outras duas poſições de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ ſe achar entre os limites de $\frac{9}{32}$ e $\frac{8}{32}$.

163 Pelo meſmo methodo ſe achará a ſituaçaõ de equilibrio de hum rectangulo, que tiver tres angulos mergulhados no fluido. Para iſſo naõ he neceſſario mais que imaginar a Fig. 52 virada com o de baixo para cima, de maneira que os tres angulos B, H, K ſejaõ os que eſtaõ mergulhados, e que o triangulo MSN ſeja a parte que ſahe fóra da ſuperficie do fluido MN. Aſſim, conſervando as meſmas denominações, teremos evidentemente, para reſolver o problema, eſtas duas equações

$$p\,ab = p'\left(ab - \frac{xy}{2}\right)$$

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}.$$

164 Probl. IV. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo* $BHSK$ *no caſo de ter dous angulos* H, S *mergulhados no fluido* (Fig. 53.).

Produzaõ-ſe as rectas SH, NM até concorrerem em Z; de

de Z para o meio de SN tire-ſe a recta ZL, que paſſará neceſſariamente pelos centros de gravidade dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$. Seja G o centro de gravidade do triangulo ZSN, e F o do triangulo ZHM; e conduzaõ-ſe as rectas GT, FK parallelas a SN, HM, e as rectas GV, FI perpendiculares a ZN. Ora, como he neceſſario para haver equilibrio, que o centro de gravidade do rectangulo $BHSK$ e o do trapezio $MHSN$ eſtejaõ na meſma vertical, ſe pelo ponto R meio da diagonal HK, e centro de gravidade do rectangulo, ſe tirar RO perpendicular á ſuperficie do fluido MN, neſta perpendicular ſe achará o centro de gravidade do trapezio $MHSN$.

Seja $SH = a$, $SK = b$, $HM = x$, $SN = y$, $ZN = z$, o pezo eſpecifico do rectangulo $= p$, e o do fluido $= p'$. Eſtá claro, que he o trapezio $MHSN = \frac{a(x+y)}{2}$, e que pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos a equaçaõ $pab = \frac{p'(x+y)a}{2}$.

Agora conduzindo pelo ponto Z o eixo vertical ZY, e conſiderando os momentos dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$ a reſpeito delle, teremos $MHSN.ZO = ZSN.ZV - ZHM.ZI$. Porém os triangulos ſemelhantes ZSN, ZHM daõ $ZS = \frac{ay}{y-x}$, $ZH = \frac{ax}{y-x}$, e conſeguintemente $ZSN = \frac{ay^2}{2(y-x)}$, e $ZHM = \frac{ax^2}{2(y-x)}$; e além diſto temos $ZM = ZN\frac{HM}{SN} = \frac{xx}{y}$, e as propriedades dos centros de gravidade daõ $ZT = \frac{2}{3}ZN = \frac{2z}{3}$, $ZK = \frac{2}{3}ZM = \frac{2zx}{3y}$, $GT = \frac{1}{3}NS = \frac{y}{3}$, $FK = \frac{1}{3}MH = \frac{x}{3}$. Logo nos triangulos ſemelhantes ZSN, GVT, FIK, teremos $VT =$

$= \frac{GT.SN}{ZN} = \frac{yy}{3z}$, $IK = \frac{FK.SN}{ZN} = \frac{xy}{3z}$, e conſeguintemente $ZV = ZT - VT = \frac{2zz-yy}{3z}$, $ZI = ZK - IK = \frac{(2zz-yy)x}{3yz}$. E ſubſtituindo todos eſtes valores na equaçaõ $MHSN.ZO = ZSN.ZV - ZHM.ZI$, acharemos $\frac{a(x+y)}{2} ZO = \frac{(2zz-yy)a(y^3-x^3)}{6yz(y-x)} = \frac{(2zz-yy)a(yy+xy+xx)}{6yz}$.

Conduzindo agora pelo ponto R a recta RX parallela a MH ou a SN, e produzindo OR até E, os triangulos ſemelhantes ZSN, RXE daraõ $XE = \frac{SN.RX}{ZS} = \frac{b(y-x)}{2a}$, e conſeguintemente $ZE = ZH + HX + XE = \frac{ax}{y-x} + \frac{a}{2} + \frac{b(y-x)}{2a} = \frac{a(y+x)}{2(y-x)} + \frac{b(y-x)}{2a}$; e os triangulos ſemelhantes ZSN, ZOE daraõ $ZO = \frac{ZE.ZS}{ZN} = \frac{a^2y(y+x)}{2z(y-x)^2} + \frac{by}{2z}$; donde em fim reſulta $MHSN.ZO = \frac{a^3y(y+x)^2}{4z(y-x)^2} + \frac{aby(y+x)}{4z}$. Comparando eſte ſegundo valor de $MHSN.ZO$ com o primeiro, e obſervando que $zz = yy + \frac{a^2y^2}{(y-x)^2}$, feitas todas as reducçoens, reſultará a equaçaõ $2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2xy + a^2y^2 + a^2x^2 - 3bxy^2 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0$, a qual ſe reſolve nas duas ſeguintes

$$yy - 2xy + xx = 0$$

$$2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0.$$

Vejamos as conſequencias particulares, que dellas reſultaõ.

A primeira dá $y = x$. Donde ſe ſegue, que o rectangulo eſtará em equilibrio quando o lado mergulhado no fluido for horizontal, como he evidente por ſi meſmo, o que ſe applica igualmente a cada hum dos lados do rectangulo.

Subſtituindo na ſegunda em lugar de y o ſeu valor $\frac{2pb - p'x}{p'}$, teremos

$$x^2 - \frac{2pbx}{p'} + \frac{4p^2b^2}{p'^2} - \frac{3pb^2}{p'} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

donde ſe tira

$$x = \frac{pb}{p'} \pm \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'^2}{2}\right]};$$

e por conſeguinte

$$y = \frac{pb}{p'} \mp \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'^2}{2}\right]}.$$

Aſſim póde ter o rectangulo mais duas ſituaçoens de equilibrio, com tanto que os valores de x e de y ſejaõ reais, poſitivos, e cada hum delles menor que b.

165 Supponhamos que $b = a$, iſto he, que o rectangulo ſe reduz a hum quadrado. Primeiramente eſtará em equilibrio, quando o lado metido no fluido for horizontal. E além diſſo teremos eſtas equaçoens

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]}, \end{cases}$$

que daõ outras duas ſituaçoens de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ ſe achar entre os limites $\frac{3}{4}$ e $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

166 Probl. V. *Achar a poſiçaõ que deve tomar ſobre hum fluido a parabola homogenea A B C, ſuppondo que os pontos* B, C *eſtaõ fóra delle* (Fig. 54.). He

He evidente, que a parabola tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando o ſeu eixo he vertical, ſuppondo ſempre que ella he eſpecificamente mais leve que o fluido. Mas aqui trata-ſe de ſaber em geral, ſe ella póde tambem pôr-ſe em equilibrio, quando o eixo eſtiver inclinado.

Seja AD o eixo, e BD ou DC a ultima ordenada. Pelo ponto H meio de MN tire-ſe o diametro HF, parallelo a DA, e pelo ponto F a ordenada FG, a recta FX para o fóco X, e a tangente FT que encontra o eixo produzido em T, e que pela propriedade da parabola he parallela a MN. Do ponto M tire-ſe MY perpendicular a FH produzida, e ajuntem-ſe os centros de gravidade K, I da parabola, e da parte mergulhada com a recta KI, que em virtude do equilibrio deve ſer vertical, ou perpendicular a MN.

Iſto poſto, ſeja $AD = a$, $BD = b$, o parametro do eixo $AD = \frac{bb}{a} = c$, $FH = x$, $MH = y$, $FG = z$, a gravidade eſpecifica da parabola $= p$, e a do fluido $= p'$. Pela propriedade deſta curva temos $AK = \frac{3}{5}a$, $FI = \frac{3}{5}x$, $GT = \frac{2zz}{c}$, $FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$, e os triangulos ſemelhantes FGT, MYH daõ $FT : FG :: MH : MY$. $= \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$. Porém a area parabolica $ABC = \frac{4}{3}BD.DA$, e a area $FMN = \frac{4}{3}MY.FH$. Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$.

Como a ſegunda condiçaõ ſe enche evidentemente, quando o eixo he vertical, e conſeguintemente $z = o$, neſte caſo particular ſerá $pab = p'yx = p'x\sqrt{cx}$, donde reſulta $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Mas tornemos ao problema geral, em que o ponto F naõ cahe ſobre o ponto A.

A propriedade da parabola dá $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$, $yy = x.4$

$= x.4FX = \frac{x(cc+4zz)}{c}$, e $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(cc+4zz)}}{\sqrt{c}}$.

Subſtituindo eſte valor na equaçaõ geral $pab = \frac{p'cxy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, acharemos igualmente $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Donde ſe vê, que o valor de x he ſempre o meſmo, qualquer que ſeja a poſiçaõ da parabola ſobre o fluido.

Os dous triangulos ſemelhantes FGT, ILH daõ $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e conſeguintemente $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e os triangulos ſemelhantes FGT, KLO daõ tambem $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mas por outra parte temos $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x + \frac{z^2}{c}$. Logo igualando os dous valores de OK, e reduzindo, acharemos $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ou metendo em lugar de x o ſeu valor acima achado

$$zz = \frac{6ac-5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}};$$

equaçaõ, que determinará outras duas ſituaçoens de equilibrio, com tanto que ſeja $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$, ou $\frac{p}{p'} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$, quantidade ſuppoſta real, e poſitiva.

167 PROBL. VI. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio da meſma parabola, ſuppondo que o ſeu centro de gravidade naõ he o meſmo que o da figura; ou por naõ ſer homogenea em toda*

toda a ſua extenſaõ, ou por eſtar carregada de algum pezo applicado a qualquer ponto della, que naõ ſeja o centro de gravidade da figura (Fig. 54.).

Seja K' o centro de gravidade do ſyſtema de todos os pezos applicados á parabola, que eſtaõ em equilibrio com a preſſaõ vertical do fluido. Sendo dado de poſiçaõ o ponto K', ſe delle conduzirmos K'*V* perpendicular ao eixo A D, ſeraõ tambem dadas as rectas K'*V*, *AV*. Seja *F M N* o eſpaço parabolico mergulhado no fluido; e pelo centro de gravidade delle *I*, conſiderado como homogeneo, e pelo ponto K' tire-ſe a recta K'*I*, que vai encontrar o eixo no ponto *K*, e que deve ſer vertical por cauſa do equilibrio.

Acabando a conſtrucçaõ, como no problema precedente, conſervando as meſmas denominaçoens, fazendo mais K'*V* $= k$, *AV* $= b$, e obſervando que *p* ſignifica aqui a gravidade eſpecifica de hum corpo homogeneo de pezo e volume igual ao da parabola *A B C*, teremos pela primeira condiçaõ do equilibrio $p\,a\,b = \frac{p'\,c\,y\,x}{V(cc + 4zz)}$, donde reſultará $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$.

Os tres triangulos ſemelhantes *FGT*, *ILH*, KL*O* daraõ como acima $OK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$, e os triangulos ſemelhantes *FGT*, K*V*K' daraõ *GT* : *FG* :: *V*K' : *V*K $= \frac{ck}{2z}$; logo $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$: mas temos por outra parte $OV = VT - OT = AV + AT - HF = b + \frac{z^2}{c} - x$; logo igualando entre ſi os dous valores de *OV*, teremos

$$10z^3 - (10cb - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0,$$

cujas raizes (depois de haver ſubſtituido em lugar de x o ſeu valor achado) determinaraõ as ſituaçoens de equilibrio da parabola propoſta; e ſuppondo $k = 0$, e $b = \frac{3}{5}a$, cahiremos

mos na ſoluçaõ do problema precedente, como deve ſer.

Eſtes exemplos baſtaõ para moſtrar, como ſe deve proceder em outros caſos, ou ſejaõ homogeneos os corpos ſuſtentados pelos fluidos, ou naõ.

Da Eſtabilidade dos corpos fluctuantes.

168 AS ſituações theoricas do equilibrio naõ ſaõ todas uteis na pratica. Porque exiſtindo muitas cauſas, como as agitações do ar, e do fluido, que tendem a deſordenar o equilibrio, requer-ſe que eſte tenha certa *eſtabilidade*, iſto he, que em virtude do pezo do ſolido e da preſſaõ vertical do fluido ſe reſtitua ao primeiro eſtado, no caſo de haver ſido alterado por alguma cauſa; e para iſſo naõ ſomente he neceſſario, que os centros de gravidade do ſolido e da parte mergulhada eſtejaõ na meſma vertical, mas tambem que tenhaõ entre ſi a poſiçaõ e diſtancia competente. Iſto he o que agora examinaremos, trazendo primeiro á lembrança algumas propoſições de Mechanica, de que nos havemos de ſervir.

169 Seja CBE hum corpo de qualquer figura (Fig. 55.), que em virtude da gravidade oſcilla livremente ao redor do ponto, ou eixo fixo C. Tirando para o centro de gravidade delle a recta CG, e as verticais CN, GL, repreſente GL o pezo do corpo $= P$, e reſolvendo eſta força em duas, huma GK na direcçaõ de CG, que ſerá deſtruida pela reſiſtencia do ponto C; e a outra GF perpendicular a CG, que produzirá o movimento de rotaçaõ; teremos $GF = P \cdot \mathit{ſen}\, GCN$, e o ſeu momento a reſpeito do eixo $C = P \cdot CG \cdot \mathit{ſen}\, GCN$. Seja mn o arco deſcrito em hum inſtante pela particula m, e QR hum arco ſemelhante deſcrito com hum raio dado CQ. O momento da particula m em ordem ao meſmo eixo ſerá $m \cdot mn \cdot Cm = m \cdot Cm^2 \frac{QR}{CQ}$; e como $\frac{QR}{CQ}$ he conſtante para todas as moleculas, e a ſoma de todos os productos $m \cdot Cm^2$ he o momento de inercia relativo ao eixo C, fazendo eſte momento $= S$, teremos $S \frac{QR}{CQ}$ por expreſ-

expreſſaõ do momento de rotaçaõ da maſſa inteira, o qual ſendo igualado ao da força GF, que o produz, dará

$$P.CG.\mathit{sen}\,GCN = S\frac{QR}{CQ}, \text{ e } \frac{QR}{CQ} = \frac{P.CG.\mathit{sen}\,GCN}{S}.$$

170 Suppondo outro corpo, que oſcille ao redor do eixo c (Fig. 56.), e deſignando por p, cg, gcn, s, qr, cq as quantidades analogas a P, CG, GCN, S, QR, CQ, teremos $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{sen}\,gcn}{s}$. Logo, ſe for $gcn = GCN$, $cq = CQ$, e $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$, teremos $qr = QR$. Donde ſe vê, que os corpos deſcreveraõ eſpaços iguais em tempos iguais; e por conſeguinte, que faraõ oſcillações iſochronas, qualquer que ſeja a grandeza do angulo inicial GCN, ou gcn.

Se alem diſſo for taõ pequeno o pezo p, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ conſiderar no centro de gravidade g, teremos $s = p.cg^2$, e a equaçaõ $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$ dará $cg = \frac{S}{P.CG}$, expreſſaõ do comprimento de hum pendulo ſimples (Fig. 56.), que faz as oſcillações no meſmo tempo que o outro pendulo compoſto (Fig. 55.).

171 Se o pendulo ſimples (Fig. 56.) deſcrever hum arco total muito pequeno gt, que ſe confunda com a ordenada gn; teremos $\mathit{sen}\,gcn = \frac{gn}{cg} = \frac{gt}{cg}$, e $\frac{qr}{cq} = \frac{gx}{cg}$; e a equaçaõ $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{sen}\,gcn}{s}$ ſe mudará em $gx = \frac{gt}{cg}$. Do meſmo modo ſuppondo que o arco total he yt, e que em hum inſtante deſcreve o arco yz, teremos $yz = \frac{yt}{cg}$. Logo $gx : yz :: \frac{gt}{cg} : \frac{yt}{cg} :: \frac{p.gt}{cg} : \frac{p.yt}{cg}$. Mas $\frac{p.gt}{cg}$ e $\frac{p.yt}{cg}$ ſaõ evidentemente as forças,

ças, que fazem correr á meſma maſſa p os eſpaços gx, yz; logo, ſendo eſtes proporcionais ás meſmas forças, ſeraõ deſcritos em tempos iguais. O meſmo ſe demonſtra de todos os outros elementos correſpondentes dos arcos totais; logo as oſcillações de hum meſmo pendulo ſaõ iſochronas, quaiſquer que ſejaõ os arcos totais, com tanto que ſejaõ muito pequenos.

172 Se a qualquer corpo perfeitamente livre ſe applicar huma força F, cuja direcçaõ FH naõ paſſe pelo centro de gravidade delle G (Fig. 57.), he demonſtrado na Dynamica que o centro de gravidade ſe moverá parallelamente a FH, como ſe a força lhe foſſe immediatamente applicada. E ſe por FH ſe conduzir o plano $ABDE$, que paſſe pelo centro de gravidade G, e do ponto G ſe tirar GH perpendicular a FH, e GO perpendicular ao plano $ABDE$, tambem he demonſtrado que o corpo tomará hum movimento de rotaçaõ ao redor do eixo GO, como ſe eſte foſſe fixo, com tanto que o plano $ABDE$ divida o corpo em duas partes iguais, e ſemelhantes. Faltando eſta condiçaõ, o movimento rotatorio naõ ſe fará ſimplesmente ao redor do eixo GO, mas em differentes ſentidos ao redor do ponto G. Mais abaixo determinaremos em geral as oſcillações dos corpos fluctuantes. Aqui ſuppomos a referida condiçaõ, ao menos ſenſivelmente, e conſideramos ſomente as oſcillações, que ſe fazem ao redor do eixo GO, ſuppondo que eſte he immovel, ou que paſſa ſempre pelos meſmos pontos do corpo.

173 Sendo pois a velocidade do centro de gravidade parallelamente a $FH = V$, e o pezo do corpo $= P$, teremos $V = \frac{F}{P}$. E ſe do ponto G com o raio dado GQ ſe deſcrever o arco QR, medida do angulo de rotaçaõ, e ſe fizer o momento de inercia relativo ao eixo $GO = S$, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ (n. 169.).

Agora ſuppondo, que alem da força F obra ſobre o corpo a força da gravidade; que a força F he dirigida verticalmente de baixo para cima; e que o plano $ABDE$ he vertical, e conſeguintemente horizontal o eixo GO; eſtá

eſtá claro, que em lugar da equaçaõ $V = \frac{F}{P}$ teremos $V = \frac{F-P}{P}$. A outra equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ ficará ſempre a meſma; porque paſſando a força P pelo centro de gravidade, naõ póde reſultar della movimento algum de rotaçaõ.

174 A applicaçaõ deſtes principios ao noſſo caſo he evidente. A força F repreſenta a preſſaõ vertical do fluido que tende a levantar o corpo, ao meſmo tempo que o pezo delle P tende a fazello deſcer; e pela equaçaõ $V = \frac{F-P}{P}$ ſe vê, que para o corpo naõ ter movimento vertical, he neceſſario que ſeja $F = P$. A ſegunda equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ moſtra tambem, que naõ eſtando na meſma vertical os dous centros de gravidade do corpo, e da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, haverá neceſſariamente movimento de rotaçaõ ao redor do eixo GO, tanto maior quanto for maior o momento $F.GH$, por ſer S conſtante. Eſta velocidade angular póde chegar, ou apartar da vertical, que paſſa pelo centro de gravidade do corpo, o centro de gravidade da parte mergulhada. No primeiro caſo haverá eſtabilidade na ſituaçaõ do equilibrio, e no ſegundo naõ a haverá; mas qualquer leve agitaçaõ baſtará para virar o corpo. Expliquemos eſta theorica geral com alguns exemplos.

175 Proel. I. *Determinar as condições da eſtabilidade de huma figura plana* ABK *ſuſtentada ſobre hum fluido* MN (Fig. 58.).

Póde ſucceder, ou que o centro de gravidade da figura inteira eſteja mais alto que o da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, ou tambem que o primeiro eſteja mais baixo que o ſegundo, por naõ ſer homogenea a figura, ou por eſtar carregada de algum pezo eſtranho na parte inferior. Examinemos ſeparadamente ambos os caſos, para maior clareza.

176 Sejaõ G, F os centros de gravidade da figura ABK, e da parte MNK, os quais devem eſtar na meſma vertical GZ em quanto ſubſiſte o equilibrio. Supponhamos,

ponhamos, que por qualquer acçaõ externa ſe inclina hum pouco a figura para á banda de B, ou que qualquer ponto Z da dita vertical deſcreve o pequeno arco ZQ, de maneira porém que a nova parte mergulhada mnK ſeja igual á primeira MNK; e que neſte eſtado ſe deixa á acçaõ da gravidade, e da preſſaõ do fluido. Bem ſe vê, que ſendo $mnK = MNK$, o centro de gravidade da figura naõ ha de ſubir, nem deſcer; e que tirando a parte commua $NVmK$, ficará $NVn = MVm$, ou $NV.nf = MV.mb$, ſendo nf, mb as alturas dos dous triangulos. Porém $nf : mb :: Vf : Vb :: VN : VM$, por ſer a inclinaçaõ muito pequena; logo $nf = \frac{VN.mb}{VM}$, e conſeguintemente $NV.nf$ ou $MV.mb = \frac{VN^2 mb}{MV}$, e $MV = NV$. Donde ſe ſegue, que o ponto V, onde ſe cortaõ as duas linhas de fluctuaçaõ MN, mn eſtá no meio de MN.

Conduzindo agora pelo ponto I, centro de gravidade de mnK, a recta Ig perpendicular á ſuperficie actual do fluido mn, até encontrar a vertical GZ no ponto g; eſtá claro, que ficando g acima do centro de gravidade da figura G, o eſforço do fluido que obra de baixo para cima da parte para onde ſe fez a inclinaçaõ, tende a levantar a figura, e reſtituilla á primeira ſituaçaõ, na qual haverá conſeguintemente eſtabilidade. Falta achar a medida deſta, ou o momento da preſſaõ vertical actual do fluido a reſpeito do centro de gravidade G, ao redor do qual ſe faz o movimento de rotaçaõ.

Do ponto G tire-ſe GE perpendicular á direcçaõ Ig da preſſaõ vertical do fluido; e pelos pontos G, F, e pelos centros de gravidade dos triangulos NVn, MVm, as rectas Gi, Fd, yx, zu parallelas a Eg. He evidente, que $mnK.GE$ he o momento de mnK em ordem ao ponto G, e que deve ſer igual ao de $(MNK + NVn - MVm)$ em ordem ao meſmo ponto. Repreſentando pois a reſultante da preſſaõ vertical por mnK, ou por $(MNK + NVn - MVm)$; deve notar-ſe, que as forças MNK, NVn ſaõ dirigidas de baixo para cima, e MVm de cima para baixo; e por conſeguinte, que todas tres ſaõ conſpirantes, e tendem a fazer girar

a

a figura ſegundo a direcçaõ AKB para a reſtituir á primeira ſituaçaõ. Iſto poſto, temos o momento de $MNK = MNK.GD$, o de $NVn = NVn.xi = \frac{NV.nf.xi}{2}$, e o de $MVm = MVm.zi = \frac{NV.nf.zi}{2}$. Logo $mnK.GE = MNK.GD + \frac{NV.nf}{2}(xi + zi) = MNK.GD + \frac{MN.nf}{4}(mn - \frac{1}{3}mn)$; e porque $mn = MN$ ſenſivelmente, ſerá $mnK.GE = MNK.GD + \frac{MN^2.nf}{6}$. Mas ſendo QZ, que mede a inclinaçaõ, hum arco deſcrito com hum raio dado GQ, temos $GD = FG\frac{QZ}{GQ}$, e $nf = NV\frac{QZ}{GQ} = \frac{MN}{2}\cdot\frac{QZ}{GQ}$. Logo $mnK.GE = \left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}$, expreſſaõ da eſtabilidade da figura propoſta.

177 Daqui ſe moſtra, que a figura neſte caſo ſempre terá eſtabilidade; e que ſendo as mais couſas iguais, a eſtabilidade ſerá tanto maior, quanto mais baixo eſtiver o centro de gravidade da figura a reſpeito do centro de gravidade da parte mergulhada, ou quanto for maior a diſtancia FG deſtes dous centros.

178 Supponhamos, que partindo a figura da poſiçaõ bKa para vir á primeira BKA, deſcreve o ponto Q ao redor do ponto G o arco QR em hum inſtante; e repreſentando por S o momento de inercia da figura ABK em ordem ao eixo perpendicular em G ao plano da figura, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{\left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}}{S}$ (n.173.), ou $QR = QZ\left(\frac{12MNK.FG + MN^3}{12S}\right)$. Donde ſe vê, que ſendo conſtante o ſegundo factor do ſegundo membro,

bro, a figura deverá oſcillar á maneira dos pendulos; e comparando a equaçaõ com a outra $g\varkappa = \frac{gt}{cg}$ (n. 171.), ſuppondo $g\varkappa = \frac{QR}{12S}$, e $gt = QZ$, teremos o valor de $cg = \frac{12SQZ}{12MNK + MN^3}$, comprimento do pendulo ſimples, que fará as oſcillações iſochronas ás da figura ABK.

Hum navio no mar eſtá no caſo da figura propoſta. Se pela pancada de huma vaga, ou por hum tufaõ de vento he tirado da ſituaçaõ do equilibrio, aſſim que he deixado á acçaõ do ſeu pezo e da preſſaõ vertical da agua, começa a arfar de popa a proa, ou a balançar de coſtado a coſtado, fazendo oſcillações iſochronas entre ſi em cada eſpecie, até que ſendo deſtruidos eſtes movimentos pela reſiſtencia da meſma agua ſe torna a pôr na ſituaçaõ do equilibrio.

179 Agora para examinarmos o ſegundo caſo, ſupponhamos que tudo fica da meſma maneira que no precedente, exceptuando ſómente que o centro de gravidade da figura ABK em lugar de eſtar em G eſtará em G', acima do centro de gravidade F da parte primitivamente mergulhada MNK. Pelo ponto G' conduza-ſe a recta $E'G'D'$ perpendicular ás duas parallelas Fd, Ig que paſſaõ pelos centros de gravidade das partes mergulhadas nas duas reſpectivas ſituações, e que ſaõ perpendiculares á ſuperficie actual do fluido mn. Eſtá claro, que repreſentando a preſſaõ vertical do fluido pela area mnK ou MNK, o momento deſta força ſerá $mnK.G'E'$; e tomando em lugar delle o da força $(MNK + NVn - MVm)$ compoſta das tres forças MNK, NVn, MVm, he facil de ver que a força MNK dirigida por Fd tende a aumentar a inclinaçaõ da figura, fazendo-a girar ſegundo BKA; e que as outras duas tendem, como no caſo precedente, a fazella girar ſegundo AKB, e a reſtituir conſeguintemente o equilibrio. Aſſim acabando a ſoluçaõ do meſmo modo, acharemos por expreſſaõ da eſtabilidade da figura a quantidade $\left(\frac{MN^3}{12} - MNK.FG'\right)\frac{QZ}{GQ}$.

180 He logo manifeſto, que ſendo $\frac{MN^3}{12} > MNK.FG'$,

a figurá terá eſtabilidade, e tanto maior quanto maior for o exceſſo do primeiro membro ſobre o ſegundo; que ſendo $\frac{MN^3}{12} = MNK.FG'$, a figura ſerá indifferente para girar ſegundo AKB, ou ABK; e que ſendo $\frac{MN^3}{12} < MNK.FG'$, a figura naõ terá eſtabilidade nenhuma, e longe de tornar á primeira ſituaçaõ, cadavez ſe apartará mais della até ſe virar.

181 Donde ſe ſegue, que o limite da maior altura, que póde ter o centro de gravidade da figura, acima do centro de gravidade da parte mergulhada, compativelmente com a eſtabilidade, he determinado pela equaçaõ $FG' = \frac{MN^3}{12MNK}$. E porque neſta ſuppoſiçaõ o momento da preſſaõ vertical do fluido he nullo, e eſte he repreſentado em geral por $mnk.G'E'$, ſerá $G'E' = 0$, e conſeguintemente o ponto G' coincidirá com g, interſecçaõ das duas perpendiculares conduzidas á ſuperficie do fluido nas duas poſições da figura. Eſte ponto g he o que M. Bouguer no ſeu *Tratado do Navio* chama *metacentro*; e abaixo delle deve cahir ſempre o centro de gravidade do pezo total de hum navio com a ſua carga, para ter eſtabilidade ſobre as ondas do mar.

182 Repreſentando por S o momento de inercia relativo ao eixo perpendicular ao centro de gravidade da figura G', acharemos tambem do meſmo modo que o comprimento do pendulo ſimples, que deve fazer as oſcillações equidiuturnas ás da figura propoſta, ſerá repreſentado por $\frac{12S}{MN^3 - 12MNK.FG'}$.

183 Para reduzirmos pois eſta ſoluçaõ, ſeja a linha de fluctuaçaõ $MN = a$, a area mergulhada $MNK = b^2$, a diſtancia do centro de gravidade G ou G' da figura ao da parte mergulhada $F = h$, o raio conſtante $GQ = 1$, o arco $QZ = z$, o momento da força que tende a reſtituir a figura ao primeiro eſtado, e que conſtitue a ſua eſtabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo que faz as oſcillaçoens no meſmo tempo que as da figura $= L$; e teremos para ambos os caſos,

$$A = \frac{(a^3 \pm 12\,b\,b^2)\,x}{12}$$

$$L = \frac{12\,S}{a^3 \pm 12\,b\,b^2}.$$

Quando ſe houverem de applicar eſtas formulas a exemplos particulares, deve conſiderar-ſe que em conſequencia das noſſas ſuppoſições, e raciocinios, b^2 repreſenta a preſſaõ vertical do fluido, ou (que vem a ſer o meſmo) o pezo abſoluto da figura ABK; que a^3 he o producto do pezo abſoluto da area a^2, ſuppoſta do meſmo pezo eſpecifico que o fluido, multiplicado pela linha a; e que S he o producto de hum pezo conhecido (que ſempre ſe póde converter no de huma parte conhecida do fluido) multiplicado pelo quadrado de huma linha dada.

184 Exemplo. Seja a figura propoſta ABK (Fig. 59.) hum triangulo iſoſceles homogeneo, e a parte merguihada MNK hum triangulo tambem iſoſceles. Conduzindo do vertice K a recta KD perpendicular ás baſes MN, AB, e ſuppondo $MN = a$, $KC = c$, $AB = f$, $KD = g$, e o pezo eſpecifico do fluido $= p$, ſerá neceſſario pôr na primeira formula do ſegundo caſo $p\,a^3$ em lugar de a^3, $\frac{p\,a\,c}{2}$ em lugar de b^2, $\frac{2}{3}\,g - \frac{2}{3}\,c$ em lugar de b; e teremos $A = \frac{p\,[\,a^3 - 4\,a\,c\,(g-c)\,]\,x}{12}$, quantidade que deve ſer poſitiva para haver eſtabilidade no triangulo.

Para determinar L, he neceſſario achar S. Tomando a reſpeito de huma particula dM ſituada em qualquer ponto T, as coordenadas $GE = x$, $ET = y$, teremos $S = \int GT^2 . dM = \int y^2\,dM + \int x^2\,dM$. Se pelo ponto T ſe imaginar huma recta parallela a KD ſerá o ſeu valor $\frac{g\,(f-2y)}{f}$, e teremos $\int y^2\,dM = \int \frac{g\,(f-2y)}{f}\,y^2\,dy$. Integrando, tomando o valor do integral quando $y = \frac{1}{2}f$, e dobrando o reſultado, ſerá $\int y^2\,dM = \frac{1}{48}\,g f^3$. Do meſmo modo conduzindo por T parallelamente a AB a recta

recta VE, ſerá eſta $= \frac{f(2g-3y)}{6g}$, e teremos $\int x_2\, dM = \int \frac{f(2g-3y)}{6g} x^2\, dx$. Integrando, tomando o valor do integral entre os limites $x = \frac{2}{3}g$, $x = -\frac{1}{3}g$, e dobrando o reſultado, ſerá $\int x^2\, dM = \frac{fg^3}{36}$. Logo $S = \frac{gf^3}{48} + \frac{fg^3}{36} = \frac{fg}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$. Porém $\frac{fg}{2}$ repreſenta o pezo do triangulo ABK, que ſendo igual ao do fluido deslocado pelo triangulo MNK terá por valor $\frac{1}{2}pac$. Logo $S = \frac{pac}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$, e ſubſtituindo eſte valor na ſegunda formula, teremos

$$L = \frac{c(3ff+4gg)}{12(a^2-4c(g-c))}.$$

185 Probl. II. *Determinar a eſtabilidade de hum corpo ſolido ſuſtentado em equilibrio ſobre hum fluido* (Fig. 58.).

Póde ſucceder, como abaixo ſe verá, que o ſolido oſcille ao meſmo tempo ao redor de differentes eixos, que paſſem todos pelo centro de gravidade. Mas aqui naõ conſideramos mais que as oſcillações ſimples, que ſe fazem ao redor de hum ſó eixo horizontal e immovel, que paſſa pelo centro de gravidade.

Seja ABK a ſecçaõ vertical do corpo perpendicular ao eixo de rotaçaõ, que he repreſentado pelo ponto G ou G', e ſeja repreſentado por F o eixo horizontal perpendicular á meſma ſecçaõ, que paſſa pelo centro de gravidade da parte do corpo merguihada no fluido. Acabando o reſto da conſtrucçaõ, como no Problema antecedente, tudo ſerá do meſmo modo, com a differença ſómente de que MN repreſenta aqui o perfil da ſuperficie de fluctuaçaõ do corpo, e que NVn, MVm repreſentaõ duas unhas formadas pela rotaçaõ das ſuperficies NV, MV ao redor do eixo horizontal deſignado por V no perfil ABK. Eſtas duas unhas ſeraõ iguais, porque ſuppomos que o centro de gravidade do corpo, naõ ſobe, nem deſce. Donde ſe ſegue, que o ponto V he neceſſariamente

te o centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ MN, porque a igualdade das unhas faz que as diſtancias dos centros de gravidade das duas ſuperficies NV, MV ao ponto V ſejaõ reciprocamente proporcionais ás meſmas ſuperficies.

De tudo iſto ſe ſegue, que fazendo o raio conſtante $GQ = 1$, o arco QZ que mede a inclinaçaõ primitiva do ſolido, que ſuppomos muito pequena $= z$, a parte mergulhada repreſentada por $MNK = N$, a diſtancia do ponto G ou G' ao ponto $F = b$, a unha NVn ou $MVm = b' z$, o momento da unha NVn a reſpeito do eixo de rotaçaõ $= b' cz$, o momento da unha MVm a reſpeito do meſmo eixo $= b' fz$, o momento de inercia do corpo em ordem ao eixo de rotaçaõ $= S$, o momento da força que conſtitue a eſtabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo ſimples iſochrono $= L$; acharemos pelo meſmo methodo acima praticado

$$A = (b' c + b' f \pm b N) z$$

$$L = \frac{S}{b' c + b' f \pm b N};$$

formulas, ſobre as quais ſe faraõ reflexões analogas ás que fizemos ſobre as das figuras planas (n. 183.). As quantidades S, N, b, b, c, f ſaõ dadas pela figura do corpo, e o angulo z por hypotheſe.

He de notar, que em toda eſta theorica ſe deſpreza a reſiſtencia, que experimenta o corpo da parte do fluido na porçaõ mergulhada, e da parte do ar na porçaõ que tem fóra do liquido, como forças incomparavelmente menores que o pezo do corpo, e a preſſaõ vertical do fluido. Mas eſſas pequenas forças repetidas por certo tempo, vem a aniquilar as oſcillações; e o corpo ſe poem em equilibrio ſegundo as leis acima eſtabelecidas, ſe alguma nova cauſa o naõ embaraçar.

Theorica geral das oſcillações dos corpos fluctuantes.

186 NO artigo precedente examinamos hum caſo particular das oſcillações dos corpos fluctuantes; agora darei huma ſoluçaõ geral deſta queſtaõ por hum

hum methodo novo, e, ſe me naõ engano, muito ſimples; methodo, de que já me ſervi nas duas Memorias *ſobre a arrumaçaõ da carga dos navios*, que ganháraõ parte dos premios da Academia em 1761 e 1765.

Para expor a minha ſoluçaõ com clareza, primeiro trarei á lembrança as propoſições de Mechanica, em que ella ſe funda.

187 Quando quaiſquer forças tendem a imprimir movimento em hum corpo, eſte lhes reſiſte por direcções contrarias em virtude da ſua inercia; e em cada inſtante ha ſempre equilibrio entre as forças ſollicitantes, e as reſiſtentes. Para determinarmos as leis deſte equilibrio, imaginemos conduzidos por hum ponto fixo A (Fig. 60.) tres eixos AP, AC, AB perpendiculares entre ſi, e immoveis no eſpaço abſoluto. Para ajudar a imaginaçaõ, podem conceber-ſe os dous eixos AP, AC ſituados no plano na figura, e AB perpendicular ao meſmo plano. Qualquer que ſeja o numero, e a direcçaõ das forças applicadas ao corpo, ſempre poderáõ reduzir-ſe em cada inſtante a tres forças ſómente, parallelas aos tres eixos AP, AC, AB. Supponhamos, que depois de aſſim reduzidas ſaõ repreſentadas pelas rectas Ff, Ee, Dd. De qualquer ponto N do corpo abaixe-ſe MN perpendicular ao plano CAP, e pelo ponto M tire-ſe MP perpendicular a AP. Entaõ reſolvendo a reſiſtencia, que oppoem ao movimento huma molecula ſituada em N, em tres forças Np, Nm, Nn reſpectivamente parallelas aos tres eixos AP, AC, AB; eſtá claro, que para eſtabelecer o equilibrio de que tratamos, he neceſſario 1°, que a reſultante de cada huma deſtas forças elementares ſeja igual á força ſollicitante que lhe correſponde; 2°, que o momento que provém das primeiras a reſpeito de cada hum dos noſſos tres eixos ſeja igual ao momento correſpondente que provém das ſegundas.

188 Aſſim, ſuppondo as forças $Ff = F$, $Ee = E$, $Dd = D$, e as rectas $AP = q$, $PM = r$, $NM = s$, o elemento do tempo $= dt$, e cada molecula do corpo $= dP$; teremos pela primeira condiçaõ eſtas tres equaçoens,

$$F = \int \frac{dP\,d\,dq}{dt^2}, \quad E = \int \frac{dP\,d\,dr}{dt^2}, \quad D = \int \frac{dP\,d\,ds}{dt^2}.$$

189 E havendo ſuppoſto que as direcçoens das forças F, E, D encontraõ os planos BAC, BAP, CAP nos pontos F, E, D, ſe conduzirmos parallelamente a CA as rectas FO e DK para os eixos AB e AP, parallelamente a AB as rectas FQ e ER para os eixos AC e AP, e parallelamente a AP as rectas ES e DH para os eixos AB e AC; he evidente, que temos o momento da força F a reſpeito do eixo $AP = o$, a reſpeito de $AC = F.FQ$, e a reſpeito de $AB = F.FO$; que o da força E a reſpeito de $AC = o$, a reſpeito de $AB = E.ES$, e a reſpeito de $AP = E.ER$; e que o da força D a reſpeito de $AB = o$, a reſpeito de $AC = D.DH$, e a reſpeito de $AP = D.DK$. Aſſim teremos relativamente a AC o momento unico repreſentado por $F.FQ - D.DH$, relativamente a AB outro repreſentado por $F.FO - E.ES$, e relativamente a AP outro repreſentado por $E.ER - D.DK$.

Analyzando do meſmo modo os momentos da reſiſtencia da molecula dP ſituada em N a reſpeito dos tres eixos AC, AB, AP, acharemos relativamente a AC hum momento unico repreſentado por $\int \frac{sdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPdds}{dt^2}$, relativamente a AB outro repreſentado por $\int \frac{rdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPddr}{dt^2}$, e relativamente a AP outro repreſentado por $\int \frac{sdPddr}{dt^2} - \int \frac{rdPdds}{dt^2}$.

Igualando pois cada hum deſtes momentos a cada hum das forças ſollicitantes, que reſpectivamente lhes correſpondem, teremos pela ſegunda condiçaõ outras tres equaçoens, a ſaber

$$F.FQ - D.DH = \int \frac{sdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPdds}{dt^2}$$

$$F.FO - E.ES = \int \frac{rdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPddr}{dt^2}$$

$$E.ER - D.DK = \int \frac{sdPddr}{dt^2} - \int \frac{rdPdds}{dt^2}.$$

190 Pelo centro de gravidade do corpo G imaginemos agora outros tres eixos GV, GT, GY parallelos cada hum a cada hum dos eixos fixos AP, AC, AB. Eſtes novos eixos ſaõ moveis com o centro de gravidade, mas cada hum delles fica ſempre parallelo a ſi meſmo. Sejaõ a reſpeito do ponto G as tres coordenadas GV, VL, LN, que correſpondem ao ponto N; e produzindo o eixo VG até encontrar o plano BAC no ponto Z, conduzaõ-ſe as rectas ZI, ZX parallelas reſpectivamente aos eixos AC, AB. Conſervando as denominaçoens precedentes, e fazendo mais $ZG = Q$, $AX = R$, $AI = S$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$; a diſtancia da linha Ff ao plano $TGV = \alpha$, e ao plano $YGV = \mathfrak{C}$; a diſtancia da recta Ee ao plano $TGV = \lambda$, e ao plano $YGT = \mathfrak{S}$; e a diſtancia da recta Dd ao plano $YGT = \Phi$, e ao plano $YGV = \Xi$; teremos evidentemente $q = Q + q'$, $r = R + r'$, $s = S + s'$, $ddq = ddQ + ddq'$, $ddr = ddR + ddr'$, $dds = ddS + dds'$, $FQ = S + \alpha$, $FO = R + \mathfrak{C}$, $ES = Q + \mathfrak{S}$, $ER = S + \gamma$, $DH = Q + \Phi$, $DK = R + \Xi$.

Subſtituindo todos eſtes valores nas ſeis equaçoens fundamentais, em primeiro lugar teremos as tres equaçoens, $F = \int \frac{dP\,ddQ}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddq'}{dt^2}$, $E = \int \frac{dP\,ddR}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddr'}{dt^2}$, $D = \int \frac{dP\,ddS}{dt^2} + \int \frac{dP\,dds'}{dt^2}$. Porém, pela propriedade do centro de gravidade, $\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,ddr'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,dds'}{dt^2} = 0$; e além diſſo ddQ, ddR, ddS ſaõ conſtantes para todos os pontos do corpo. Logo as tres primeiras equaçoens ſeraõ reduzidas ás ſeguintes

$$F = \frac{P\,ddQ}{dt^2}, \quad E = \frac{P\,ddR}{dt^2}, \quad D = \frac{P\,ddS}{dt^2}.$$

Em ſegundo lugar, conſideremos ſómente as partes correſpondentes $F.FQ$ e $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ da primeira das outras tres equaçoens; e teremos $F.FQ = FS + F\alpha$,

e

$$e\int\frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}=\int\frac{(dP(S+s')\,(ddQ+ddq'))}{dt^2}$$

$$=\int\frac{S\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{s'\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{S\,dP\,ddq'}{dt^2}+$$

$$\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}=\frac{PSddQ}{dt^2}+\frac{ddQ}{dt^2}\int s'dP+S\int\frac{d\,P\,ddq'}{dt^2}$$

$$+\int\frac{s'\,dP\,d\,dq'}{dt^2}=FS+\int\frac{s'\,dP\,d\,dq'}{dt^2}$$

, pondo em lugar de $\frac{PSddQ}{dt^2}$ o ſeu valor FS, e obſervando que pela propriedade do centro de gravidade he $\int s'\,dP=0$, e $\int\frac{dP\,ddq'}{dt^2}=0$. Feitas as meſmas operaçoens ſobre as outras partes correſpondentes das ſobreditas equaçoens, e omittindo os termos que ſe deſtroem, acharemos que ellas ſe reduzem finalmente ás tres ſeguintes,

$$F\alpha-D\varphi=\int\frac{s'\,dP\,d\,dq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,d\,ds'}{dt^2}$$

$$F\mathfrak{C}-E\mathfrak{d}=\int\frac{r'\,dP\,d\,dq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,d\,dr'}{dt^2},$$

$$E\mathfrak{Y}-D\,\mathfrak{X}=\int\frac{s'\,dP\,d\,dr'}{dt^2}-\int\frac{r'\,dP\,d\,ds'}{dt^2}.$$

191 Iſto poſto, reflectiremos que qualquer que ſeja o movimento de cada ponto N do corpo, relativamente ao centro de gravidade, ſempre podemos concebello como produzido pela rotaçaõ do corpo ao redor dos tres eixos GY, GV, GT. Supponhamos (Fig. 61.), que o ponto N eſtá no primeiro inſtante em H; e ſejaõ GE, EF, FH as coordenadas correſpondentes. Imaginemos, que em virtude da rotaçaõ do corpo ao redor do eixo GY, a recta FH girando parallelamente a ſi meſma, toma a poſiçaõ SK; que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GV, o ponto K chega a R; e que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GT, o ponto R chega a N. As coordenadas NL, LV, GV ſaõ aqui as meſmas que na figura precedente. Tirem-ſe as rectas GF, GS, DK; do ponto R abaixe-ſe RO perpendicular ao plano TGV; e pelo ponto O tire-ſe perpendi-

pendicularmente a GT a recta XO, que paſſa neceſſariamente pelo ponto L. Tirem-ſe tambem as rectas XR, XN; e dos pontos D, X levantem-ſe perpendicularmente ao plano TGV, ou parallelamente o eixo GY, as rectas DZ, XP.

192 Suppondo pois $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$; e os angulos de rotaçaõ, ao redor do eixo $GY = x$, ao redor de $GV = y$, e ao redor de $GT = z$; teremos $DGS = EGF + x$, e conſeguintemente $DS = GF . \mathit{ſen}\, DGS = \lambda \mathit{coſ}\, x + \psi \mathit{ſen}\, x$, e $GD = GF . \mathit{coſ}\, DGS = \psi \mathit{coſ}\, x - \lambda \mathit{ſen}\, x$. Do meſmo modo ſerá $DO = DK . \mathit{ſen}\, RDZ = DS . \mathit{coſ}\, y + SK \mathit{ſen}\, y = \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{coſ}\, y + \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{coſ}\, y + \mu \mathit{ſen}\, y$; $RO = DK . \mathit{coſ}\, RDZ = SK \mathit{coſ}\, y - DS \mathit{ſen}\, y = \mu \mathit{coſ}\, y - \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, y - \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, y$; $XL = XR . \mathit{ſen}\, NXP = XO \mathit{coſ}\, z - RO \mathit{ſen}\, z = \psi \mathit{coſ}\, x \mathit{coſ}\, z - \lambda \mathit{ſen}\, x \mathit{coſ}\, z - \mu \mathit{coſ}\, y \mathit{ſen}\, z + \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{ſen}\, z + \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{ſen}\, z$; $LN = XR . \mathit{coſ}\, NXP = RO \mathit{coſ}\, z + XO \mathit{ſen}\, z = \mu \mathit{coſ}\, y \mathit{coſ}\, z - \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{coſ}\, z - \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{coſ}\, z + \psi \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, z - \lambda \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, z$. E porque $XL = GV = q'$, $DO = VL = r'$, $LN = s'$, teremos $q' = \psi \mathit{coſ}\, x \mathit{coſ}\, z - \lambda \mathit{ſen}\, x \mathit{coſ}\, z - \mu \mathit{coſ}\, y \mathit{ſen}\, z + \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{ſen}\, z + \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{ſen}\, z$; $r' = \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{coſ}\, y + \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{coſ}\, y + \mu \mathit{ſen}\, y$; $s' = \mu \mathit{coſ}\, y \mathit{coſ}\, z - \lambda \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{coſ}\, z - \psi \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, y \mathit{coſ}\, z + \psi \mathit{coſ}\, x \mathit{ſen}\, z - \lambda \mathit{ſen}\, x \mathit{ſen}\, z$.

193 Aſſim, por meio deſtes valores, podemos eliminar q', r', s', ddq', ddr', dds' das equaçoens precedentes. Mas a reſpeito das tres quantidades $\int s' dP\, ddq' - \int q' dP\, dds'$, $\int r' dP\, ddq' - \int q' dP\, ddr$, $\int s' dP\, ddr' - \int r' dP\, dds'$, que vem a ſer o meſmo reſpectivamente que $\int dP\, d(s'dq' - q'ds')$, $\int dP\, d(r'dq' - q'dr')$, $\int dP\, d(s'dr' - r'ds')$, deve notar-ſe que nas duas differenciaçoens que primeiro he neceſſario fazer para achar $d(s'dq' - q'ds')$, $d(r'dq' - q'dr')$, $d(s'dr' - r'ds')$, os angulos x, y, z ſaõ variaveis, e as quantidades ψ, λ, μ conſtantes; mas na integraçaõ que ſe ſegue ſó as quantidades dP, ψ, λ, μ devem ſer conſideradas como variaveis, e as outras devem eſcrever-ſe antes do final de integraçaõ, porque os integrais experimem entaõ os movimentos das partes do corpo.

Eſtas formulas gerais ſervem para determinar os movimentos de qualquer corpo, ſollicitado por quaiſquer forças. Agora moſtraremos a applicaçaõ dellas ao noſſo Problema

blema das oſcillaçoens de hum corpo fluctuante, ſuppondo que ellas ſaõ muito pequenas, para maior ſimplicidade dos reſultados.

194 Seja *ABK* (Fig. 62) huma ſecçaõ vertical do corpo no primeiro inſtante do movimento, feita por hum plano que paſſe pelo centro de gravidade do meſmo corpo G, e que contenha o eixo vertical *GY*, e o horizontal *GV*; *HPK* (Fig. 63.) outra ſecçaõ vertical, perpendicular á primeira, que paſſe tambem por *G*, e contenha o eixo vertical *GY* e o horizontal *GT*; *MENI* (Fig. 64.) a ſecçaõ horizontal do corpo, feita á ſuperficie da agua, na qual *MN* he a ſecçaõ commua dos planos *MENI*, *ABK*; e *EI* a dos planos *MENI*, *HPK*. Os eixos *GY*, *GV*, *GT* ſaõ aqui os meſmos que na figura 60, ou 61. Para maior ſimplicidade do calculo, façamos paſſar, como he ſempre permittido, o plano *ABK* (Fig. 62.) pelo centro de gravidade *L* do plano de fluctuaçaõ *MENI* (Fig. 64.). Suppondo, que o centro de gravidade *F* (Fig. 65.) da parte mergulhada no primeiro inſtante eſtá poſto a certa diſtancia muito pequena da vertical *GY*, por elle e pela dita vertical ſe conduza o plano *CDK*, que cortará o plano *MENI* ſegundo *RS*; e do meſmo ponto *F* tirem-ſe as rectas *FQ*, *FF'* reſpectivamente perpendiculares a *GY* e *RS*; e *Ff* (Fig. 64.), perpendicular a *MN*. Aqui, e daqui por diante devem ſempre combinar-ſe juntamente as quatro figuras 62, 63, 64, 65. Havendo-ſe concebido bem a ſua poſiçaõ reſpectiva, he neceſſario buſcar em cada huma dellas as linhas, as ſuperficies, e os ſolidos que havemos de deſignar.

195 Iſto poſto, he facil de ver que ſendo o corpo ſollicitado unicamente pela acçaõ do proprio pezo, e pela preſſaõ vertical do fluido, teremos $F = o$, $E = o$, e $D =$ á differença entre a preſſaõ vertical do fluido e o pezo do corpo; e por conſeguinte, que o corpo naõ póde ter movimento progreſſivo horizontal, ou que $Q = o$, e $R = o$; mas que em virtude da força *D* póde o ſeu centro de gravidade ſubir, ou deſcer, em quanto elle róda a reſpeito dos tres eixos *GY*, *GV*, *GT*.

Imaginemos pois, que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo *GT* ſe tem o corpo inclinado da parte de *A*, e deſcrito o angulo z em hum tempo t, tomando o plano de fluctuaçaõ *MN* a poſiçaõ *m n*; e que em virtude da rotaçaõ

rotaçaõ ao redor do eixo GV, ſe tem inclinado da parte de P, e deſcrito o angulo y no meſmo tempo, tomando o plano de fluctuaçaõ EI a poſiçaõ ei. Pelos pontos q, q' onde mn, ie cortaõ a vertical GY, tirem-ſe dc, tr parallelas a MN, EI. He evidente, que no tempo propoſto ſahio da agua hum priſma, que tem $MENI$ por baſe e Oq ou Oq' por altura, e mais as duas unhas $nqc, eq'r$; e que entráraõ nella as duas unhas $mqd, tq'i$. Eſtas ſaõ as mudanças que ſuccedem á parte mergulhada, para as quais ſe vê que naõ contribue nada o movimento ao redor do eixo vertical GY.

Supponhamos, que as verticais que paſſaõ pelos centros de gravidade das quatro unhas repreſentadas pelos perfis $nqc, mqd, eq'r, tq'i$, encontraõ o plano $MENI$ nos pontos g, z, l, s reſpectivamente; e conduzaõ-ſe as rectas gb, zk, lp, su perpendiculares a MN. Alem das denominações precedentes, ſeja o volume do corpo $= M$, o da parte mergulhada no primeiro inſtante $= N$, a area $MENI = aa$, a diſtancia OL do ſeu centro de gravidade ao ponto $O = b$; a unha nqc que ſe póde conceber produzida pela rotaçaõ da area EIN ao redor de $EI = c^{i}z, Ob = e, gb = e'$; a unha mqd que ſe póde conceber produzida pela rotaçaõ da area EIM ao redor de $EI = f^{i}z, Ok = g, zk = g'$; a unha $eq'r$ que ſe póde conſiderar produzida pela rotaçaõ da area MNE ao redor de $MN = i^{i}y, Op = k, ip = k'$; a unha $iq'r$ que ſe póde conſiderar produzida pela rotaçaõ da area MNI ao redor de $MN = i^{i}y, Ou = n, su = u'$; a altura GQ do centro de gravidade da parte mergulhada acima do centro de gravidade do corpo $= b, Of = \delta, F'f = \delta'$, o pezo eſpecifico do corpo $= p$, e o do fluido $= p'$.

Aſſim teremos primeiramente $D = p'(N - MENI.Oq - nqç + mqd - cq'r + iq't) - pM = p'(N - MENI.Oq - nqc + mqd) - pM = p'N - p'a^{2}\delta - p'c^{i}z + p'f^{i}z - pM$. E conſiderando, que em virtude da inclinaçaõ do corpo para A, o centro de gravidade F ſe chega para o plano HPK a quantidade bz, ou que Of ſe faz $= \delta - bz$; e que em virtude da inclinaçaõ para I, o meſmo ponto F ſe chega para o plano ABK a quantidade by, ou que $F'f$ ſe faz $= \delta' - by$; he facil de ver que depois do tempo t o momento da preſſaõ vertical

tical do fluido a reſpeito do eixo GT ſerá $D\Phi = p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - c' ez - f' gz - i' ky - i' ny]$, e a reſpeito do eixo GV ſerá $D\Xi = -p'[N(\delta' - by) + c' e'z + f' g'z - i' k'y - i' n'y]$.

196 Falta achar os valores de $\int dP d(s'dq' - q'ds')$, $\int dP d(r'dq' - q'dr')$, $\int dP d(s'dr - r'ds')$ em funções dos angulos x, y, z. Para iſſo, como as oſcillações ſaõ muito pequenas, nos valores de q', r', s' acima achados faremos os coſenos iguais ao raio, tomaremos os angulos em lugar dos ſenos, e deſprezaremos os termos que tiverem mais de hum ſeno. Aſſim teremos

$$s'dq' - q'ds' = -\lambda\mu dx - (\mu^2 + \psi^2)dz + \psi\lambda dy$$
$$r'dq' - q'dr' = -(\psi^2 + \lambda^2)dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy$$
$$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2)dy - \psi\lambda dz;$$

e conſeguintemente

$$\int dP d(s'dq' - q'ds') = -pddx\int\lambda\mu dM - pddz\int(\mu^2 + \psi^2)dM + pddy\int\psi\lambda dM$$
$$\int dP d(r'dq' - q'dr') = -pddx\int(\psi^2 + \lambda^2)dM - pddz\int\lambda\mu dM - pddy\int\psi\mu dM$$
$$\int dP d(s'dr' - r'ds') = pddx\int\psi\mu dM + pddy\int(\lambda^2 + \mu^2)dM - pddz\int\psi\lambda dM;$$

quantidades, em que as partes comprehendidas debaixo dos ſinais de integraçaõ ſaõ dadas pela figura do corpo.

197 Para abbreviar pois façamos $\int\lambda\mu dM = A$, $\int(\lambda^2 + \psi^2)dM = B$, $\int\psi\lambda dM = C$, $\int(\psi^2 + \lambda^2)dM = G$, $\int\psi\mu dM = H$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)dM = K$; e de tudo o que ha precedido reſultaráõ as quatro equações ſeguintes,

$$[p'N - p'a^2 S - (p'c' - p'f')z - pM]dt^2 = pMddS \quad (A)$$
$$-p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - (c'e + f'g)z - (i'k + i'n)y]dt^2 = -pAddx - pBddz + pCddy \quad (B)$$
$$pGddx + pAddz + pHddy = 0 \quad (C)$$
$$p'[N(\delta' - by) + (c'e' + f'g')z - (i'k' + i'n')y]dt^2 = pHddx + pKddy - pCddz, \quad (D)$$

que repreſentaõ em geral todas as oſcillações, de que he ſuſceptivel hum corpo fluctuante na hypotheſe de que ellas ſejaõ muito pequenas.

198 Como as quatro variaveis S, x, y, z naõ paſſaõ do primeiro gráo, eſtas equações combinadas entre ſi ſe integraõ facilmente pelo methodo dado por *M.* d'Alembert nas Memorias de Berlim *A.* 1748, e 1750. Aqui naõ

naõ faremos em geral este calculo, que naõ tem mais difficuldade que a extensaõ; mas limitarnos-hemos ao exame de alguns casos particulares.

199 Supponhamos, como succede nas oscillações dos navios, que o plano ABK corta o corpo fluctuante em duas partes exactamente iguais, e que os centros de gravidade das duas unhas $eq'r$, $iq't$ se achaõ, ao menos sensivelmente, no plano HPK. Assim teremos $e'=0$, $g'=0$, e na equaçaõ (B) poderemos desprezar os termos i^3ky, i^3ny, como incomparavelmente mais pequenos que os outros. Alem disso pela propriedade do centro de gravidade teremos $A=0$, $C=0$; e as nossas quatro equações se mudaráõ nas seguintes,

$$[p'N-p'a^2S-(p'c^3-p'f^3)z-pM]\,dt^2 = pM\,ddS \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (E)$$

$$p'[N(\delta-bz)-a^2bS-(c^3e+f^3g)z]\,dt^2 = pB\,ddz \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (F)$$

$$G\,ddx+H\,ddy=0 \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (G)$$

$$p'[N(\delta'-by)-2i^3k'y]\,dt^2 = pH\,ddx + pK\,ddy \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (H).$$

Nesta ultima equaçaõ póde desprezar-se o termo $pH\,ddx$, porque tem por valor $-\dfrac{pH^2\,ddy}{G}$, e H he huma quantidade cujo quadrado, ao menos, póde tratar-se como infinitamente pequeno da primeira ordem.

200 Para abbreviar o calculo, façamos $\dfrac{p'N-pM}{pM}=I$, $\dfrac{p'a^2}{pM}=L$, $\dfrac{p'c^3-p'f^3}{pM}=P$, $\dfrac{p'N\delta}{pB}=I'$, $\dfrac{p'a^2b}{pB}=L'$, $\dfrac{p'(Nb+c^3e+f^3g)}{pB}=P'$, $\dfrac{p'N\delta'}{pK}=Q$, $\dfrac{p'(N\cdot b+2i^3k')}{pK}=R$; e as nossas equações se reduziráõ á forma seguinte,

$$ddS-I\,dt^2+LS\,dt^2+Pz\,dt^2=0$$
$$ddz-I'\,dt^2+L'S\,dt^2+P'z\,dt^2=0$$
$$G\,ddx+H\,ddy=0$$
$$ddy-Q\,dt^2+Ry\,dt^2=0.$$

201 As duas primeiras, combinadas entre si, integraõ-se

ſe pelo ingenhoſo methodo de M. d' Alembert com muita facilidade. Multiplique-ſe a primeira por hum coefficiente indeterminado $\mathfrak{C}$, e ſome-ſe com a ſegunda; o que dará $\mathfrak{C}\,d\,dS - \mathfrak{C}\,I\,dt^2 + \mathfrak{C}\,L\,S\,dt^2 + \mathfrak{C}\,P\,z\,dt^2 + d\,dz - I'\,dt^2 + L'\,S\,dt^2 + P'\,z\,dt^2 = 0$. Depois ſupponhaſe, que temos a equaçaõ $\mathfrak{C}\,L\,S + \mathfrak{C}\,P\,z + L'\,S + P'\,z = \alpha\,(\mathfrak{C}\,S + z)$, ſendo α outro coefficiente indeterminado; e comparando entre ſi os termos da meſma eſpecie reſultaráõ eſtas duas equações $\mathfrak{C}\,L + L' = \alpha\,\mathfrak{C}$, e $\mathfrak{C}\,P + P' = \alpha$, das quais ſe tiraõ dous valores de $\mathfrak{C}$ que deſignaremos por $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, e outros dous de α, que repreſentaremos por α, α'. Fazendo pois $\mathfrak{C}\,S + z = s$, e $\mathfrak{C}'\,S + z = s'$, a equaçaõ $\mathfrak{C}\,d\,dS - \mathfrak{C}\,I\,dt^2$ &c dará as duas ſeguintes,

$$d\,ds + \alpha\,s\,dt^2 - (\mathfrak{C}\,I + I')\,dt^2 = 0$$
$$d\,ds' + \alpha'\,s'\,dt^2 - (\mathfrak{C}'\,I + I')\,dt^2 = 0.$$

Multiplicando a primeira por ds, a ſegunda por ds', e integrando duas vezes, facilmente ſe achará

$$s = \left(\frac{\mathfrak{C}\,I + I'}{\alpha}\right)(1 - \cos t\sqrt{\alpha})$$
$$s' = \left(\frac{\mathfrak{C}'\,I + I'}{\alpha'}\right)(1 - \cos t\sqrt{\alpha'});$$

e por conſeguinte

$$S = \frac{(\mathfrak{C}\,I + I')}{\alpha\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')}(1 - \cos t\sqrt{\alpha}) - \frac{(\mathfrak{C}'\,I + I')}{\alpha'\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')}(1 - \cos t\sqrt{\alpha'})$$
$$z = \frac{\mathfrak{C}\,(\mathfrak{C}'\,I + I')}{\alpha'\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')}(1 - \cos t\sqrt{\alpha'}) - \frac{\mathfrak{C}'\,(\mathfrak{C}\,I + I')}{\alpha\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')}(1 - \cos t\sqrt{\alpha}).$$

Eſtes valores de S e z ſaõ completos, porque daõ $S = 0$, e $z = 0$, quando $t = 0$, como deve ſer.

Quanto ás duas ultimas equações $G\,d\,dx + H\,d\,dy = 0$, e $d\,dy - Q\,dt^2 + R\,y\,dt^2 = 0$, integraõ-ſe immediatamente, e daõ

$$y = \frac{Q}{R}(1 - \cos t\sqrt{R} \qquad x =$$

$$\varkappa = -\frac{H.Q}{G.R}\,(1-\cos t\sqrt{R}).$$

202 Conſta pois das expreſſões de S e de z, que ſe α e α' forem quantidades reais e poſitivas, o movimento S do centro de gravidade, e o de rotaçaõ z ao redor do eixo GT ſeraõ muito pequenos, como havemos ſuppoſto; e por conſeguinte, que o corpo ſará oſcillações, pelas quais naõ ſerá expoſto a virar-ſe. Mas ſe α e α' foſſem quantidades reais negativas, achar-ſe-hia que os valores de S e z dependiaõ de logarithmos, e por conſequencia que creſceriaõ ſempre á medida que creſceſſe t. Donde ſe ſegue, que neſſe caſo as oſcillações naõ ſeriaõ infinitamente pequenas, como havemos ſuppoſto, e que o corpo naõ teria eſtabilidade, mas ſeria expoſto a virar-ſe. Do meſmo modo ſe acha que os valores de S e z contém logarithmos, quando $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}'$, e conſeguintemente tambem α e α' ſaõ quantidades imaginarias, ou quando $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}'$ ſaõ reais, mas iguais entre ſi. Eſtes dous ultimos caſos ſaõ puramente geometricos, pois naõ tem lugar no noſſo problema.

Pela meſma raſaõ conſta, que os valores de y e x ſeraõ infinitamente pequenos, quando R for huma quantidade poſitiva; e que ſendo R negativo, o corpo naõ terá eſtabilidade a reſpeito dos dous eixos GV, GY.

203 Bem ſe vê, que as condições de eſtabilidade, de que acabamos de fallar, dependem da poſiçaõ do centro de gravidade do corpo inteiro a reſpeito do centro de gravidade da parte mergulhada, conſiderada como homogenea. Todas as vezes que o primeiro eſtá mais abaixo que o ſegundo, o corpo fluctuante tem eſtabilidade em todos os ſentidos; mas ſe o primeiro eſtiver mais alto que o ſegundo, póde faltar a eſtabilidade. As noſſas formulas daõ a conhecer a maior diſtancia, que entaõ ſe póde dar entre os dous centros de gravidade; e eſte methodo de determinar os *metacentros* he geral, ſimples, e directo.

204 Supponhamos agora, que a vertical GY paſſa pelo centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ, e que os dous planos ABK, HPK cortaõ o corpo, cada hum em duas partes iguais e ſemelhantes. Neſte caſo as unhas nqc, mqd ſaõ iguais, aſſim como as duas $eq'r$, $iq't$;

e além diſſo teremos $A = o$, $C = o$, $H = o$. Suppondo tambem, que o pezo do fluido deslocado no primeiro inſtante he igual ao pezo do corpo, ou que temos $p' N = \varrho M$, o corpo naõ poderá ſubir, nem deſcer, e ſerá conſeguintemente $S = o$. Igualmente ſerá $\varkappa = o$, preſcindindo de todo o movimento de rotaçaõ horizontal primitivamente impreſſo. Deſte modo as noſſas quatro equações fundamentais (n. 200.) ſe reduziráõ ás duas ſeguintes

$$d\,d\varkappa - I'\,dt^2 + P'\varkappa\,dt^2 = o$$
$$d\,dy - Q\,dt^2 + Ry\,dt^2 = o,$$

as quais daõ

$$\varkappa = \frac{I'}{P'}\,(1 - cos\,t\sqrt{P'})$$

$$y = \frac{Q}{R}\,(1 - cos\,t\sqrt{R}).$$

205 Terá pois entaõ o corpo ſimpleſmente dous movimentos de rotaçaõ ſobre os dous eixos horizontais GT, GV que paſſaõ pelo ſeu centro de gravidade, e ſaõ perpendiculares entre ſi. Eſtas oſcillações ficaõ ſendo ſempre muito pequenas, e o corpo terá por conſeguinte eſtabilidade, quando P' e R ſaõ quantidades poſitivas. Ellas ſaõ abſolutamente da meſma eſpecie das que faz hum pendulo, que vai e vem; e deſignando por Z, Y as ſuas amplitudes totais, teremos evidentemente $Z = \frac{2I'}{P'}$, e $Y = \frac{2Q}{R}$.

206 Os tempos empregados em correr os angulos Z, Y ſaõ muito faceis de achar. Para que $\varkappa$ venha a ſer Z, e y venha a ſer Y, he neceſſario que tenhamos $1 - cos\,t\sqrt{P'} = 2$, $1 - cos\,t\sqrt{R} = 2$, ou $cos\,t\sqrt{P'} = -1$, $cos\,t\sqrt{R} = -1$; e por conſeguinte, $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{P'}}$, $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{R}}$. Subſtituindo em lugar de P' e R os ſeus valores, acharemos que o tempo de cada oſcillaçaõ Z he repreſentado por $180^\circ \sqrt{\left[\frac{\int p\,(\psi^2 + \mu^2)\,dM}{p'\,(Nb + 2c'e)}\right]}$, e o de cada

da oſcillaçaõ Y por $180^{o}\sqrt{\left[\frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)\,dM}{p'(Nb+2i^2k')}\right]}$.

Como eſtes valores naõ contém as diſtancias iniciais δ, δ' do centro de gravidade da parte mergulhada aos planos HPK, ABK, eſtá claro que as oſcillações ſeraõ iſochronas em cada eſpecie, quaiſquer que ſejaõ as amplitudes totais, com tanto que ſejaõ ſempre muito pequenas.

207 Para determinarmos o comprimento dos pendulos ſynchronos ás oſcillações deſte corpo, notaremos, que ſe hum pendulo ſimples, que tem o comprimento l eſtiver no primeiro inſtante apartado da vertical a quantidade δ muito pequena, e no tempo t deſcrever o angulo u com o raio l; ſerá a equaçaõ do ſeu movimento $ddu = \frac{(\delta - u)\,dt^2}{l}$, ou $u = \delta\left(1 - cos\frac{t}{\sqrt{l}}\right)$. Donde ſe tira o tempo de huma oſcillaçaõ inteira $= 180^{o}\sqrt{l}$. Aſſim, ſendo L o comprimento do pendulo ſynchrono ás oſcillações Z, e L' ás oſcillações Y, teremos

$$L = \frac{\int p(\psi^2+\mu^2)\,dM}{p'(Nb+2c^2e)}$$

$$L' = \frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)\,dM}{p'(Nb+2i^2k')}\,.$$

208 Exemplo. Seja o corpo fluctuante hum ſemi-ſpheroide elliptico homogeneo, produzido por meia revoluçaõ da ametade de huma ellipſe AHB ao redor do ſeu eixo AB (Fig. 66.). O plano $AHBK$ que ſerve de baſe, e o plano de fluctuaçaõ $MENI$ ſaõ parallelos, e a ſua diſtancia he a recta dada ZO. O ponto G he o centro de gravidade do ſolido, e os tres eixos GY, GV, GT ſaõ os meſmos que acima; ABK he a ſecçaõ longitudinal, e HPK a latitudinal. He neceſſario achar os valores de N, b, c^2e, i^2k', $\int(\psi^2+\mu^2)\,dM$, $\int(\lambda^2+\mu^2)\,dM$. Buſquemo-los por ordem.

1°, Para evitar a multiplicidade, e confuſaõ das linhas, conſideremos $MENI$ como huma ſecçaõ indeterminada do meio-ellipſoide. Tendo conduzido ao eixo MN da curva $MENI$ qualquer ordenada CD, faça-ſe paſſar por ella o plano vertical $SCXC'L$ que corta o plano vertical

ABK por XR. Bem ſe vê, que CD ſerá tambem a ordenada de hum circulo deſcrito com o raio RX. Affim $CD^2 = XR^2 - DR^2$: mas pela propriedade da ellipſe $XR^2 = (BZ^2 - RZ^2)\frac{ZP^2}{BZ^2} = (BZ^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$, e $DR^2 = (BZ^2 - NO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$; logo $CD^2 = (NO^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$. Donde ſe vê que a curva $MENI$ he huma ellipſe ſemelhante á ellipſe $AHBP$.

Seja $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, a raſaõ da circumferencia ao diametro $= n$; e teremos $AHBP = nab$, $MENI = nab\frac{NO^2}{BZ^2} = \frac{na(bb - xx)}{b}$. Logo $dN = -\frac{nadx(bb - xx)}{b}$, e $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$. Completando eſte integral de maneira que deſvaneça quando $x = b$, tomemos o ſeu valor fazendo $x = ZO = f$, linha conhecida; e teremos $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right)$. Suppondo $f = 0$, N ſe tornará em M e conſeguintemente ſerá $M = \frac{2nab^2}{3}$.

2°, O momento elementar do ſolido $MKNIME$ a reſpeito do ponto Z he $-\frac{nax dx(bb - xx)}{b}$, cujo integral completo he $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$. Façamos primeiramente $x = 0$, e dividamos por M ou $\frac{2nab^2}{3}$, e teremos a diſtancia do centro de gravidade do ſolido $AKBPAH$ ao ponto $Z = \frac{3}{8}b$. Depois façamos $x = f$, e dividamos por N ou $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - bf^2 + \frac{f^3}{3}\right)$; e teremos

remos a diſtancia do centro de gravidade da parte mergulhada ao ponto $Z = \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$. Por conſeguinte ſerá $b = \frac{3}{8}b - \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$.

3°, Imaginemos que a unha formada pela rotaçaõ da area EIN ao redor de EI, he compoſta de huma infinidade de triangulos prs perpendiculares ao eixo EI. Suppondo $OI = l$, $ON = m$, $Op = u$, eſtá claro que $pr = \frac{m}{l}\sqrt{(ll - uu)}$, e que o momento elementar da ametade da unha he $= \frac{m^2}{l^2}(ll - uu) \cdot \frac{m\sqrt{(ll - uu)}}{3l} \cdot du \cdot z = \frac{m^3 z}{3l^3} du \left(ll - uu\right)^{\frac{3}{2}}$, cujo integral ſe achará $\frac{m^3 z}{3l^3}\left(\frac{u(ll - uu)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4}l^2 \int du \sqrt{(ll - uu)}\right)$.

Fazendo $u = l$, reflectindo que entaõ $\int du \sqrt{(ll - uu)}$ repreſenta a area de hum quarto de circulo deſcrito com o raio l, e dobrando o integral, acharemos que a quantidade repreſentada por $c^3 e$ he $= \frac{nm^3 l}{8}$. Ponha-ſe em lugar de m o ſeu valor $\frac{a}{b}\sqrt{(bb - ff)}$, e em lugar de l o ſeu valor $\sqrt{(bb - ff)}$, e teremos $c^3 e = \frac{na^3(bb - ff)^2}{8b^3}$.

4°, Do meſmo modo ſe achará, que a quantidade que havemos repreſentado por $i^3 k^3$ tem por expreſſaõ $\frac{nb^3(aa - ff)^2}{8a^3}$.

5°, Para determinar $\int(\psi^2 + \mu^2)\, dM$, ou a ſoma dos productos das particulas do meio ellipſoide pelos quadrados das ſuas diſtancias ao eixo latitudinal GT, conſideremos huma ſecçaõ indeterminada $MENI$, e ſobre a orde-

ordenada CD ao eixo MN tomemos dous pontos quaisquer infinitamente vezinhos f, u. Havendo supposto $ZO = x$, OM ou $ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, e lembrando-nos que $ZG = \frac{3}{8}b$, veremos que o producto do elemento fu pelo quadrado da sua distancia ao eixo GT he representado por $ds\left(qq + \left(\frac{3}{8}b - x\right)^2\right)$; quantidade, na qual sómente s he variavel. Integrando pois, e fazendo $s = DC = \frac{b}{a}\sqrt{(m^2 - q^2)}$, teremos $\left(qq + \left(\frac{3}{8}b - x\right)^2\right)$. $\frac{b}{a}\sqrt{(mm - qq)}$ por soma dos productos de todos os pontos de DC pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Multiplicando esta soma por dq, e integrando na suppoſiçaõ de sómente q ser variavel, acharemos tambem que $\frac{b}{a}\left(\frac{m^2}{4} + \left(\frac{3}{8}b - x\right)^2\right)\int dq\sqrt{(mm - qq)} - \frac{q(mm - qq)^{\frac{3}{2}}}{4}$ he a soma de todos os productos dos pontos da area elliptica $CDOE$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Fazendo $q = m = \frac{a}{b}\sqrt{(bb - xx)}$; considerando que então $\int dq\sqrt{(mm - qq)} = \frac{n \cdot m^2}{4} = \frac{na(bb - xx)}{4b}$; e quadruplicando o integral; teremos $\frac{nb}{a}\left(\frac{a^4(bb - xx)^2}{4b^4} + \frac{a^2(bb - xx)}{b^2}\left(\frac{3}{8}b - x\right)^2\right)$ por soma dos productos de todos os pontos da ellipſe inteira $MENI$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Em fim multiplicando esta soma por dx; integrando na intelligencia de sómente ser x variavel; e fazendo depois $x = b$; teremos $\int(\psi^2 + \mu^2)\,dM = \frac{n(64a^2b^2 + 19ab^4)}{480}$.

60, Pelo mesmo methodo se achará a soma dos productos

ctos das particulas do meio-ellipsoide pelos quadrados das suas distancias ao eixo longitudinal GV, ou $\int(\lambda^2+\mu^2)\,dM = \frac{83\,n\,a\,b^4}{480}$.

209 De todos estes calculos se segue, que sendo Z, Y as amplitudes das oscillaçoens relativas aos eixos GT, GV, e L, L' os comprimentos dos pendulos synchronos; teremos

$$Z = \frac{16\,b^2\,(2\,b^3 - 3\,b^2\,f + f^3)\,\delta}{3\,(b^3\,(2b^3 - 3b^2f + f^3) + 2\,(aa-bb)\,(bb-ff)^2)}$$

$$Y = \frac{16\,a^4\,(2\,b^3 - 3\,b^2\,f + f^3)\,\delta'}{3\,(a^4\,b\,(2b^3 - 3b^2f + f^3) - 2a^4\,(bb-ff)^2 + 2b^4\,(aa-ff)^2)}$$

$$L = \frac{64\,p\,(a^2\,b^5 + 19\,b^7)}{60\,p'\,(b^3\,(2b^3 - 3b^2f + f^3) + 2\,(aa-bb)\,(bb-ff)^2)}$$

$$L' = \frac{83\,p\,a^4\,b^5}{60\,p'\,(a^4\,b\,(2b^3 - 3b^2f + f^3) - 2a^4\,(bb-ff)^2 + 2b^4\,(aa-ff)^2)}$$

Deixamos ao leitor o cuidado de evolver estas formulas por meudo, e de concluir as dimensoens do ellipsoide mais proprias para que as oscillaçoens sejaõ suaves, pela combinaçaõ mais ventajosa das amplitudes com as duraçoens; materia curiosa por si mesma, e que póde ter applicaçoens muito uteis na carregaçaõ dos navios. Estas discussoens naõ cabem nos limites, que nos havemos proposto neste Tratado.

SE-

SEGUNDA PARTE
OU
ELEMENTOS
DE
HYDRAULICA.

210 ORdinariamente ſe entende por *Hydraulica* a Sciencia do movimento das aguas; mas aqui tomamos eſte nome em ſentido mais amplo, entendendo por elle a Sciencia geral que trata do movimento dos fluidos, tanto incompreſſiveis como elaſticos. Como porém o movimento das aguas he neſte genero o objecto mais intereſſante ás neceſſidades dos homens, delle trataremos com mais particularidade. Mas tudo o que diſſermos ſe applicará igualmente aos outros fluidos incompreſſiveis; e no fim deſta parte fallaremos brevemente do movimento dos fluidos elaſticos.

211 Se nós ſoubeſſemos a maſſa, a figura, e o numero das particulas de hum fluido em movimento, eſta materia ſeria reduzida a hum problema de Dynamica, pois ſe trataria de achar o movimento de hum ſyſtema de pequenos corpos livres, que actûaõ huns contra os outros, e que podem além diſſo eſtar ſujeitos á acçaõ de algumas forças exteriores, como por exemplo á da gravidade. Mas eſtamos muito longe de ter os dados neceſſarios para reſolver eſte problema; e poſto que os tiveſſemos, achar-ſe-hia taõ complicado, que por meio da analyſe actual ſeria abſolutamente intratavel.

212 Viſta a impoſſibilidade de eſtabelecer huma theorica directa do movimento dos fluidos, era neceſſario buſcar outro meio de reſolver a queſtaõ. O mais ſimples, e o mais rigoroſo conſiſtiria em tirar as leis do movimento

to dos fluidos, aſſim como as do equilibrio, de hum principio primordial, fundado ſobre a natureza dos meſmos fluidos, ou demonſtrado pela experiencia. Temos viſto, que a *igualdade de preſſaõ* he o principio fundamental da Hydroſtatica; e eſſe meſmo podia ſervir de baſe á Hydraulica. Porque o movimento das particulas de hum fluido póde conſiderar-ſe a cada inſtante, como compoſto do movimento que ellas tinhaõ no inſtante precedente, e de outro que tem ſido deſtruido, e em virtude do qual ellas ficariaõ em equilibrio. Donde ſe vê, que conhecendo eſte eſtado de equilibrio pelo principio da igualdade de preſſaõ, tambem ſe conheceria o eſtado de movimento, porque o movimento ao primeiro inſtante ſuppoem-ſe dado. Grandes Geometras tem por eſta idêa reduzido o movimento dos fluidos a formulas gerais; mas eſtas ſaõ taõ compoſtas e complicadas pela natureza da couſa, que dellas ſe naõ póde tirar fructo algum para as neceſſidades da pratica.

213 Sem embargo, para darmos aqui huma idêa geral da applicaçaõ deſte principio, he neceſſario trazer á lembrança, que ſe em huma maſſa fluida ſollicitada por quaiſquer forças, e poſta em equilibrio, imaginarmos hum canal fechado de qualquer figura, o fluido nelle incluido deve eſtar em equilibrio, independentemente do reſto da maſſa; porque ſuppondo que todo eſte reſto ſe torna ſolido, ſem mudar de lugar, nem de volume, he manifeſto que o fluido do canal fica no meſmo eſtado de compreſſaõ que dantes, e conſeguintemente no meſmo eſtado de equilibrio.

214 Em conſequencia deſte principio, conſideremos em hum fluido em equilibrio (Fig. 67.) quatro pontos quaiſquer M, N, K, H ſituados em hum meſmo plano, formando entre ſi hum canal rectangular $MNKH$, que eſtará em equilibrio. Tomando qualquer ponto fixo B, tiremos as coordenadas ao ponto M, $EP = x$, $PM = y$, huma parallela a MH, e a outra a MN; e ſupponhamos que todas as forças das particulas obraõ no plano EPM, e ſaõ conſeguintemente reductiveis a duas, parallelas a EP, e PM. Sejaõ P, P' as forças que ſollicitaõ os pontos M, N parallelamente a EP; e Q, Q' as que ſollicitaõ os pontos M, H parallelamente a PM; todas funçoens de x, y e conſtantes. Façamos tambem $MH = \delta x$, $MN = \delta y$; advertindo, que eſtas differenciais $\delta x, \delta y$ ſaõ relati-

relativas á mudança que ſuccede quando ſe paſſa da conſideraçaõ do ponto *M* á de outro ponto *H*, ou *N* infinitamente vizinho, ficando as differenciais dx, dy para indicar a mudança que ſuccede quando huma meſma particula paſſa do lugar que occupa para o lugar contiguo. Humas e outras differenciais ſe achaõ do meſmo modo; e na differenciaçaõ de huma funçaõ relativa ás meſmas coordenadas x e y, δx e dx tem ſempre o meſmo coefficiente, aſſim como tambem δy e dy.

Iſto poſto, eſtá claro que em virtude da força Q a preſſaõ da columna *MN* ſobre o ponto *N* he $Q\delta y$, e que a preſſaõ da columna *NK* ſobre o ponto *K* em virtude da força P' he $P'\delta x$. A primeira preſſaõ ſe tranſmete, como a ſegunda, ao ponto K; e ajuntando-as ambas, ſerá a preſſaõ total que padece o ponto K da parte do fluido $MNK = Q\delta y + P'\delta x$. Do meſmo modo acharemos, que a preſſaõ total do meſmo ponto K da parte do fluido *MHK* he $P\delta x + Q'\delta y$. Logo, para haver equilibrio, ſerá $Q\delta y + P'\delta x = P\delta x + Q'\delta y$, e conſeguintemente $(P' - P)\delta x = (Q' - Q)\delta y$. Mas $P' - P$ he a differencial de P naõ fazendo variar ſenaõ y, e $Q' - Q$ a differencial de Q naõ fazendo variar ſenaõ x. Logo, ſuppondo $P' - P = A\delta y$, $Q' - Q = A'\delta x$, teremos $A\delta y . \delta x = A'\delta x . \delta y$, ou $A = A'$. Donde ſe ſegue, que *no eſtado de equilibrio a differencial de* P *tomada na ſuppoſiçaõ de ſer ſómente variavel* y, *e dividida por* δy, *deve dar o meſmo que a differencial de* Q *tomada na ſuppoſiçaõ de ſómente ſer* x *variavel, e dividida por* δx.

Ordinariamente ſe enuncia eſta propoſiçaõ de hum modo commodo, e abbreviado, a ſaber $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, ou (que vem a ſer o meſmo) $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$.

215 Quando as forças naõ eſtaõ no meſmo plano, ſempre podem reduzir-ſe a tres, duas das quais eſtejaõ no plano *EPM*, e a terceira ſeja perpendicular ao meſmo plano. Supponhamos pois, que o ponto M experimenta a acçaõ de tres forças P, Q, R parallelas ás tres coordenadas rectangulares x, y, z, das quais ellas ſaõ funçoens quaiſquer; e imaginemos oito pontos fluidos M, N, K, H, Q, O, S, R formando hum parallelepipedo rectangulo, que ſe póde

póde conſiderar como compoſto de ſeis canais rectangulares, e cada hum por ſi em equilibrio. Aſſim vemos, que o equilibrio no canal $MNKH$ dá $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; no canal $MOQH$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; e no canal $MNSO$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Os outros tres canais dariaõ as meſmas equaçoens; e deſte modo temos as condiçoens gerais do equilibrio de hum fluido ſujeito á acçaõ de quaiſquer forças.

216 Supponhamos agora, que o fluido $ABCD$ (Fig.68.) ſujeito á acçaõ da gravidade ſe move dentro do vaſo que o contém, ſegundo qualquer lei, de maneira porém que cada ponto M naõ-tenha mais que dous movimentos hum vertical ou parallelo a EP, e outro horizontal parallelo a PM. Se tiveſſe dous movimentos horizontais perpendiculares entre ſi, que he o caſo mais compoſto do Problema; por meio do que acabamos de moſtrar (n. 215.) ſe faria a applicaçaõ do que himos a moſtrar na ſuppoſiçaõ de ſer hum ſó, para maior ſimplicidade. Sejaõ quatro pontos fluidos M, N, K, H diſpoſtos em fórma rectangular, e ſupponhamos que paſſado hum inſtante chegaõ reſpectivamente a m, n, k, b. Conduzaõ-ſe mp, nf, bg, kq perpendiculares ao eixo EP; e ſupponhamos $EP = x$, $PM = y$, $PO = z$, o tempo $= t$, a velocidade do ponto M parallela a $EP = u$, a parallela a $PM = v$, e a gravidade $= g$. Aſſim teremos $u = T.M$, $v = T.N$, ſendo T huma funçaõ do tempo corrido deſde o principio do movimento, e M, N funçoens ſómente de x e de y. Porque como o fluido contiguo á parede BOD corre ao longo della, temos $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$ quando $y = z$; e $\frac{dx}{dz}$ he ſempre huma funçaõ de x e z ſómente, qualquer que ſeja o tempo t. Aſſim deſapparecendo neſte caſo a funçaõ do tempo pela diviſaõ de u por v, deveremos ter em geral $u = MT$, $v = NT$, ao menos quando o fluido corre por dentro de hum vaſo, como ſuppomos aqui.

217 Seja pois $du = d(TM) = TA\,dx + TB\,dy + MT'dt$, e $dv = d(TN) = TA'dx + TB'dy + NT'dt$, ſendo A, B, A', B' funções de x e y, T' huma funçaõ do tempo, dx e dy os eſpaços corridos vertical

ideal e horizontalmente pelo ponto M no inſtante dt. Metendo por dx o ſeu valor $u\,dt$ ou $T\,M\,dt$, e por dy o ſeu $v\,dt$ ou $T\,N\,dt$, teremos a força vertical $\frac{du}{dt} = T^2\,A\,M + T^2\,B\,N + M\,T'$, e a horizontal $\frac{dv}{dt} = T^2\,A'\,M + T^2\,B'\,N + N\,T'$. Porem, ſe as particulas naõ actuaſſem humas contra as outras, a velocidade vertical u no fim do inſtante dt ſeria $u + g\,dt$. Logo conſiderando, pelo principio de M. d'Alembert, a velocidade $u + g\,dt$ como compoſta das duas $u + du$ e $g\,dt - du$, e ſuppondo que a primeira deſtas he a que ſubſiſte, deve a ſegunda $g\,dt - du$ ſer tal que naõ altere a primeira, e que ſeja deſtruida. Do meſmo modo ſe verá, a reſpeito da velocidade horizontal v, que o ponto M em virtude da velocidade $-dv$ deveria ficar em equilibrio. Por conſeguinte, ſe o ponto M foſſe a cada inſtante ſollicitado pela acçaõ das duas forças $g - \frac{du}{dt}$ e $-\frac{dv}{dt}$ deveria ficar em equilibrio; e aſſim teremos (n.214.) a equaçaõ fundamental $\frac{d[g - (T^2\,A\,M + T^2\,B\,N + M\,T')]}{dy} = \frac{d(-T^2\,A'\,M - T^2\,B'\,N - N\,T')}{dx}$.

218 Huma condiçaõ eſſencial, a que eſta equaçaõ deve ſatisfazer, he que o fluido $MNKH$ paſſando para $mnkh$ naõ mude de volume, porque o ſuppomos incompreſſivel. Ora o ponto M no inſtante dt corre parallelamente a EP e PM os eſpaços $u\,dt$ e $v\,dt$; o ponto N, mudando-ſe a reſpeito delle as velocidades u e v em $u + T\,B\,\delta y$ e $v + T\,B'\,\delta y$, corre parallelamente a EP e PM os eſpaços $(u + T\,B\,\delta y)\,dt$, e $(v + T\,B'\,\delta y)\,dt$; o ponto H, pela meſma raſaõ, os eſpaços $(u + T\,A\,\delta x)\,dt$, e $(v + T\,A'\,\delta x)\,dt$; e em fim o ponto K os eſpaços $(u + T\,A\,\delta x + T\,B\,\delta y)\,dt$, e $(v + T\,A'\,\delta x + T\,B'\,\delta y)\,dt$. Logo teremos $Ep = x + u\,dt$, $pm = y + v\,dt$, $Ef = x + (u + T\,B\,\delta y)\,dt$, $fn = y + \delta y + (v + T\,B'\,\delta y)\,dt$, $Eg = x + \delta x + (u + T\,A\,\delta x)\,dt$, $gb = y + \delta y + (v + T\,A'\,\delta x)\,dt$, $Eq = x + \delta x + (u + T\,A\,\delta x + T\,B\,\delta y)\,dt$,

$qk = y + \delta y + (v + TA'\delta x) + TB'\delta y)\,dt$; e conſeguintemente

$$Ef - Ep = TB\,\delta y\,dt$$
$$fn - pm = \delta y + TB'\delta y\,dt$$
$$Eq - Eg = TB\,\delta y\,dt$$
$$qk - gb = \delta y + TB'\delta y\,dt$$
$$Eg - Ep = \delta x + TA\,\delta x\,dt.$$

Donde ſe vê, que mn póde tomar-ſe como parallela a MN, e que $mnkb$ póde conſiderar-ſe como hum rectangulo, cuja area he $= (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\delta x\,dt)$. Logo teremos $\delta x\,\delta y = (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\,\delta x\,dt)$; e por conſeguinte $TA\,\delta y\,\delta x\,dt + TB'\,\delta y\,\delta x\,dt = 0$, ou $A = -B'$, ou (que vem a ſer o meſmo) $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$; primeira equaçaõ de condiçaõ entre M e N, pela qual ſe vê que $N\,dx - M\,dy$ deve ſempre ſer huma differencial completa.

219 Alem diſto, como a equaçaõ fundamental (n.217.) deve ſer identica (n.214.), eſtá claro que a parte $\frac{d(MT')}{dy}$ do primeiro membro deve ſer igual á parte $\frac{d(NT')}{dx}$ do ſegundo; e porque T' he conſtante neſtas expreſſões, teremos $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$; ſegunda equaçaõ de condiçaõ, pela qual ſe vê que $M\,dx + N\,dy$ deve ſer tambem huma differencial completa.

220 As duas equações $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dx}$, e $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ſatisfazem inteiramente á equaçaõ fundamental. Porque tendo já $\frac{d(MT')}{dy} = \frac{d(NT')}{dx}$, do reſto da equaçaõ (ſendo aqui T conſtante) feita a differenciaçaõ reſultará $A\frac{dM}{dy} + M\frac{dA}{dy} + B\frac{dN}{dy} + N\frac{dB}{dy} = A'\frac{dM}{dx} + M\frac{dA'}{dx} + B'\frac{dN}{dx} + N\frac{dB'}{dx}$. E porque $A = \frac{dM}{dx}$, $B = \frac{dM}{dy}$, $A' = \frac{dN}{dx}$

$\frac{dN}{dx}$, $B' = \frac{dN}{dy}$, teremos $A\frac{dM}{dy} = \frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}$, $B\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dy}\cdot\frac{dN}{dy} = -\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM}{dx}$, $A'\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dx}\cdot\frac{dM}{dx}$, $B'\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dy}\cdot\frac{dN}{dx} = -\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dN}{dx}$, $M\frac{dA}{dy} = M\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $M\frac{dA'}{dx} = M\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx} = M\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}$, expreſſaõ que pela natureza do calculo differencial he o meſmo que $M\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $N\frac{dB}{dy} = N\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$, $N\frac{dB'}{dx} = N\frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx} = N\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy} = N\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$. E ſubſtituindo todos eſtes valores na equaçaõ precedente, acharemos que todos os ſeus termos ſe deſtroem, e que he conſeguintemente identica.

221 Ha hum caſo, em que a equaçaõ $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ naõ tem lugar neceſſariamente; e he, quando for $\frac{T'}{T^2} = b$, ſendo b huma conſtante, ou $T = \frac{1}{a - bt}$, ſendo a outra conſtante. Entaõ riſcando na equaçaõ fundamental (n.217.) os termos que ſe deſtroem em virtude da condiçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$, que ſempre tem lugar, ao reſto da equaçaõ ſe ſatisfaria

tisfaria ſendo $M\frac{dA}{dy} + N\frac{dB}{dy} + b\frac{dM}{dy} = M\frac{dA'}{dx} + N\frac{dB'}{dx} + b\frac{dN}{dx}$.

Eſta condiçaõ póde exprimir-ſe de outro modo mais commodo. Porque dando a equaçaõ fundamental neſta ſuppoſiçaõ $\frac{d(AM + BN + bM)}{dy} = \frac{d(A'M + B'N + bN)}{dx}$, eſtá claro que $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dM}{dy} + bM\right) + dy\left(M\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} + bN\right)$ ſerá huma differencial completa. Tirando della a quantidade $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dN}{dx}\right) + dy\left(M\frac{dM}{dy} + N\frac{dN}{dy}\right)$, que tambem he differencial completa, o reſto $(N\,dx - M\,dy)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + b(M\,dx + N\,dy)$ ſerá tambem huma differencial completa, aſſim como a differencial $N\,dx - M\,dy$, que ſempre he completa em virtude da equaçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$.

222 As funções M, N, T devem ſer naõ ſomente compativeis com a equaçaõ que exprime a figura das paredes do vaſo, e repreſentar o eſtado primitivo do fluido; mas tambem he neceſſario que ſejaõ taes, que as ſuperficies ſuperior e inferior do fluido cortem perpendicularmente as direcções das forças em cada hum dos inſtantes do movimento, e que as forças em fim obrem de baixo para cima na ſuperficie inferior, e de cima para baixo na ſuperior. Quando todas eſtas condições naõ tem lugar juntamente, o problema naõ he ſoluvel rigoroſamente. Sobre o que póde ver-ſe M. d' Alembert, a quem ſe deve eſta Theorica, no ſeu *Enſayo ſobre a reſiſtencia dos fluidos*, e nos Volumes I e V dos ſeus *Opuſculos Mathematicos*. Igualmente ſe pódem conſultar as Memorias de M. Euler ſobre eſta materia entre as da Academia de Berlin A. 1755.

Por

Por aqui ſe póde fazer huma idea geral do methodo rigoroſo, que o principio da *igualdade de preſſaõ* nos offerece para determinar o movimento dos fluidos. Mas, como temos dito, eſte methodo requer a coexiſtencia de muitas condições, e eſſas podem ſer incompativeis entre ſi, ao menos em todo o rigor. Donde reſulta, que ſaõ muito poucos os caſos, em que o problema ſe póde reſolver aſſim; e neſſes meſmos, ſaõ os calculos quaſi impraticaveis, por muito prolixos e complicados. Por eſta raſaõ tomaremos eſta materia em outro ponto de viſta, donde venhaõ reſultados mais faceis, que ſendo confrontados com os da experiencia poſſaõ ſer uteis na pratica.

CAPITULO I.

Do movimento das aguas, que ſahem por quaiſquer orificios de vaſos conſtantemente cheios.

223 COnſta pela experiencia 1°, que ſahindo a agua de qualquer vaſo *A C D B* (Fig. 69. 70.) por hum orificio *P Q*, todas as particulas comprimindo-ſe humas ás outras tem huma tendencia para o orificio; 2°, que deſcem com velocidades ſenſivelmente verticais e iguais até huma certa diſtancia do plano horizontal que paſſa pela borda ſuperior do orificio, diſtancia que mal ſe póde determinar, mas que na maior parte das experiencias ſe acha ſer de tres até quatro pollegadas; 4°, que paſſado eſte termo todas as particulas que naõ correſpondem verticalmente ao orificio, caminhaõ para elle de todas as partes por direcções mais ou menos obliquas; 4o. que procurando cada huma das particulas conſervar a ſua velocidade pela direcçaõ obliqua com que entra no orificio, a veia da agua ſe contrahe até huma certa diſtancia *P p*, formando huma eſpecie de pyramide truncada, que tem a baſe menor *p q* no lugar onde a veia acaba de ſe contrahir. He eſſencialmente neceſſario na pratica attender a eſta contracçaõ, como adiante moſtraremos.

224 Sejaõ *A B*, *T V*, *R L* &c as ſecções planas, ou curvas, perpendiculares ás direcções das particulas, de maneira que as meſmas particulas individuais que ſe achaõ

em AB deſçaõ conſecutivamente para TV, RL &c; he evidente, que conſervando-ſe o vaſo conſtantemente cheio por meio de nova agua que nelle entra a ſubſtituir a que ſahe pelo orificio, e havendo o fluxo tomado huma velocidade permanente, as ſecções AB, TV &c devem ſer ſempre as meſmas, porque as particulas nos meſmos lugares neceſſariamente haõ de ter as meſmas velocidades tanto em direcçaõ, como em quantidade. O modo de conſervar os vaſos conſtantemente cheios he indifferente, com tanto que a agua que entra naõ communique abalo nenhum ſenſivel á que eſtá no interior delles.

225 Iſto poſto, conſidere-ſe o fluido dividido em huma infinidade de camadas iguais $ABba$, $TVut$ &c, comprehendidas entre ſecções infinitamente vezinhas, e perpendiculares ás direcções das particulas; e ſeja $pqgf$ o pequeno priſma de licor, que ſahe pelo orificio no inſtante em que a ſuperficie AB deſce até ab, e TV até tu &ç. Eſtá claro, que eſte priſma deve ſer igual a qualquer das camadas; e aſſim, ſendo B a area da baſe de huma das camadas TV, e x a altura de hum priſma que tendo a baſe B he igual á dita camada $TVut$, C a area pq, e y a altura do priſma $pqgf$, teremos $Bx = Cy$, e conſeguintemente $x : y :: C : B$. E porque a ſuperficie TV ſe abaixa até tu em quanto pq ſe abaixa até fg, he evidente que x, y repreſentaõ as velocidades medias das duas camadas $TVut$, $pqgf$. Logo *a velocidade de qualquer ſecçaõ do fluido tomada no interior do vaſo he para a velocidade do licor ao ſahir do orificio como a area do orificio para a area da ſecçaõ.*

226 Daqui ſe ſegue, que ſendo o orificio infinitamente pequeno em comparaçaõ da amplitude do vaſo, a velocidade do licor na ſahida do orificio ſerá infinita em comparaçaõ da velocidade das ſecções interiores; e porque na natureza naõ exiſte velocidade infinita, ſerá a velocidade no orificio finita, e no interior infinitamente pequena em comparaçaõ della.

227 Se compararmos entre ſi as quantidades dos licores, da meſma ou differente eſpecie, que ſahem com velocidades uniformes pelos orificios de dous quaiſquer vaſos (Fig. 71. 72.), he manifeſto que ſeraõ entre ſi na raſaõ compoſta dos tempos, das areas dos orificios, e das velocidades; e ſe os tempos forem iguais, ſeraõ na raſaõ com-

compoſta das velocidades, e das areas dos orificios.

228 Para determinarmos agora a velocidade, com que ſahe qualquer licor de hum vaſo $ACDB$ por hum orificio infinitamente pequeno pq (Fig. 71.), reflectiremos que ſendo infinitamente pequena a velocidade das particulas no interior do vaſo (n. 226.), póde ſuppor-ſe que todas as camadas ſuperiores ao orificio perdem a velocidade, que teriaõ naturalmente em virtude da gravidade; e conſeguintemente, que o pequeno priſma de licor $pqgf$, que ſahe a cada inſtante, he impellido pelo fluido ſuperior da meſma maneira, que o ſeria huma tampa applicada ao orificio para impedir a ſahida. Aſſim, ſendo p' a denſidade ou pezo eſpecifico do fluido, a força motriz que expelle o priſma $pqgf$ ſerá repreſentada por $p'.bq.pq$ (n. 39.).

Supponhamos que no inſtante em que a preſſaõ $p'.bq.pq$ faz ſahir o priſma $pqgf$, a gravidade abſoluta de hum priſma $pq\varkappa y$ (a qual ſe póde repreſentar por $p'.pq.q\varkappa$) por ſi ſó o faria correr a pequena altura $q\varkappa$, começando deſde o eſtado de quietaçaõ. Eſtá claro, que ſendo as forças motrizes $p'.bq.pq$, $p'.q\varkappa.pq$ proporcionais ás quantidades de movimento que produzem, ſe chamarmos V e u as velocidades que ellas imprimem nas maſſas $pqgf$, $pqg\varkappa$, teremos $p'.bq.pq : p'.q\varkappa.pq :: pqgf.V : pq\varkappa y.u$, ou $p'.bq.pq : p'.q\varkappa.pq :: pq.V.V : pq.u.u$ (n. 227.), e conſeguintemente $bq : q\varkappa :: V^2 : u^2$. Mas $q\varkappa$ he o eſpaço, pelo qual deſcendo hum grave adquirio a velocidade u, e pela theorica do movimento dos graves conſta que os eſpaços ſaõ na raſaõ duplicada das velocidades adquiridas; logo bq he a altura donde deveria cahir hum grave para adquirir a velocidade V. Logo *a velocidade de hum fluido ao ſahir de qualquer orificio infinitamente pequeno he igual á que teria adquirido hum grave cahindo da altura do fluido bq acima do orificio pq*; ou mais brevemente, *a velocidade do fluido he devida á ſua altura.*

229 O raciocinio precedente ſuppoem neceſſariamente, que o orificio he infinitamente pequeno, para que o licor poſſa ſer expellido pelo pezo da columna ſuperior. Sem embargo, a maior parte dos autores elementares, que niſto tem quaſi todos copiado a M. Varignon, affirmaõ que o licor ao ſahir de hum orificio horizontal he

expellido pelo pezo da colunna ſuperior, ſem limitar a grandeza do orificio. Mas para ver, que a propoſiçaõ naõ he verdadeira em geral, baſta reflectir que ſe imaginarmos hum cylindro vertical cheio de agua, e de repente ſe tirar ou aniquilar o fundo, a camada inferior do fluido naõ ſentirá preſſaõ alguma das ſuperiores, mas todas deſceráõ com a meſma velocidade, conforme a acceleraçaõ dos graves, como ſe tudo foſſe hum corpo ſolido. A camada do fundo naõ he carregada do pezo da colunna ſuperior, ſenaõ quando as camadas ſuperiores perdem as ſuas velocidades naturais da gravidade, e conſeguintemente quando o orificio he infinitamente pequeno.

Ainda que em rigor a propoſiçaõ he ſomente verdadeira a reſpeito dos orificios infinitamente pequenos, na pratica com tudo, quando os orificios ainda que finitos ſaõ pequenos em comparaçaõ das amplitudes dos vaſos, de maneira que naõ excedaõ por exemplo a raſaõ de 1 para 20, obſerva-ſe que as velocidades ſaõ ſenſivelmente as meſmas que nos orificios infinitamente pequenos. Neſte caſo a preſſaõ da colunna ſuperior he menor, mas iſſo he ſenſivelmente compenſado com o movimento que trazem as particulas, que immediatamente impellem o pequeno priſma que actualmente ſahe pelo orificio. Somente ſe obſerva, que a velocidade naõ adquire a ſua plenitude uniforme e permanente, ſenaõ paſſados alguns ſegundos de tempo; e quanto o orificio he mais conſideravel, tanto ſe manifeſta mais eſta deſigualdade.

230 He manifeſto, que a propoſiçaõ precedente ſe extende aos orificios laterais ſendo infinitamente pequenos, de maneira que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido; porque a preſſaõ he igual para todas as partes, quando as alturas do fluido ſaõ as meſmas.

231 E porque a velocidade he igual á que teria adquirido o fluido cahindo da altura bq, pela theorica dos graves concluiremos que o licor ao ſahir do orificio tem huma velocidade capaz de o fazer ſubir á meſma altura bq; e que com eſſa velocidade uniforme correria hum eſpaço igual a $2bq$ no meſmo tempo que gaſtaria hum grave em cahir da altura bq.

232 Sejaõ bq, lk as alturas dos licores $ACDB$, $OGHP$ (Fig. 71. 72.), acima dos pequenos orificios pq, ik; e

V, v

V, v as velocidades reſpectivas com que ſahem por elles. Como cada huma deſtas velocidades, ſeja qual for a natureza do fluido, he repreſentada pela raiz quadrada da altura da colunna que lhe correſponde, teremos ſempre em geral $V : v :: \sqrt{bq} : \sqrt{lk}$, iſto he, *ſeraõ as velocidades na raſaõ ſubduplicada das alturas dos fluidos, quer ſejaõ da meſma eſpecie, quer naõ.*

Daqui ſe vê, quanto ſe engana o autor da Architectura Hydraulica (tom. 1. p. 187.), quando diz que as velocidades de dous licores differentes, de agua e mercurio por exemplo, ſaõ entre ſi como as raizes quadradas dos productos das alturas multiplicadas pelas gravidades eſpecificas. Devia reflectir no meſmo exemplo que dá (n. 490.), que ſe a colunna que expelle o mercurio pelo orificio de hum vaſo he quatorze vezes mais pezada do que a colunna que expelle a agua pelo orificio do outro, tambem a maſſa expellida no primeiro caſo he quatorze vezes mais pezada do que no ſegundo; e aſſim acharia que a velocidade deve ſer a meſma em ambos os caſos. Em geral he evidente, que todas as vezes que as forças motrizes ſaõ proporcionais ás maſſas que ellas poem em movimento, as velocidades ſaõ iguais.

233 Com os principios, que havemos expoſto, facilmente ſe determinará a relaçaõ entre a area do orificio, a altura do fluido acima delle, o tempo da fluxaõ, e a quantidade de licor que nelle deve ſahir, ou o orificio ſeja horizontal, ou lateral, com tanto que neſte ſegundo caſo ſeja taõ pequeno, ou de tal ſorte poſto, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido.

Seja K a area do orificio pq (Fig. 71.), b a altura conſtante bq da agua no vaſo, Q a quantidade della que ſahe no tempo t, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. Pela theorica do movimento dos graves acharemos, que o tempo que deveria gaſtar hum grave em cahir da altura b he $= \sqrt{\frac{b}{a}}$. Porém neſte tempo deve ſahir huma colunna de fluido, que tem por baſe K, e por altura $2b$ (n. 231.), porque a altura b he conſtante, e conſeguintemente uniforme a velocidade ao ſahir do orificio. Logo no tempo repreſentado

do por $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſahirá a quantidade de fluido repreſentada por $2bK$; e conſeguintemente teremos $\sqrt{\frac{b}{a}} : t :: 2bK : Q$, e $Q = 2tK\sqrt{ab}$.

Daqui ſe moſtra, que *as quantidades de fluido, que no meſmo tempo ſahem por orificios differentes, ſaõ entre ſi na raſaõ compoſta da raſaõ dos orificios, e da raſaõ ſubduplicada das alturas do fluido.*

A quantidade a he ſempre conſtante e igual a 15 pés e 1 pollegada, quando o tempo ſe conta por ſegundos. As outras quantidades K, t, b, Q podem variar; e bem ſe vê que ſendo dadas tres quaiſquer dellas, a quarta ſe determinará pela equaçaõ precedente.

234 Eſta meſma equaçaõ ſerve para reſolver o problema ſeguinte: *Supponhamos, que no interior de hum canhaõ ſe faz ſubitamente hum vazio, pela exploſaõ da polvora; e que ſe pergunta o tempo, que gaſtará o ar em entrar nelle, e correr todo o ſeu comprimento.* Sendo a preſſaõ da atmosfera, que faz entrar o ar no canhaõ, equivalente a huma colunna de agua de 32 pés (n. 85.), ou a huma colunna de ar uniforme de 32.850 pés (n.90.), naõ he neceſſario mais que fazer na equaçaõ precedente $b = 27200$ pés, e $Q = \frac{Kl}{t}$, ſendo l o comprimento do canhaõ; e teremos $t = \frac{l}{2\sqrt{ba}}$. Se, por exemplo, for $l = 16$ pés, achar-ſe-ha $t = \frac{3}{4}$ de hum minuto terceiro proximamente. Deſprezamos aquí a pequena quantidade de ar que entra pelo *ouvido*, e a pequena variaçaõ que experimenta a elaſticidade do fluido, em quanto corre o eſpaço l.

235 Para determinar a fluxaõ dos licores por orificios horizontais de qualquer grandeza, a maior parte dos Autores de Hydraulica fazem duas hypotheſes geraes: huma he, que imaginando o fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais, eſtas deſcem ſempre parallelamente a ſi meſmas; e a outra, que todos os pontos de huma meſma camada tem a meſma velocidade vertical. A primeira parece ſer huma conſequencia neceſſaria da experiencia; porque evacuando-ſe qualquer vaſo

por

por hum orificio , a ſuperficie do licor ſempre ſe conſerva horizontal , e parallela a ſi meſma , ao menos até chegar muito perto do fundo , e as meſmas cauſas que conſervaõ o paralleliſmo da primeira camada devem produzir o meſmo effeito nas camadas inferiores , ao menos proximamente. A ſegunda naõ he rigoroſamente exacta , quando o vaſo naõ he priſmatico e vertical ; porque as particulas contiguas ás paredes devem ſeguir a direcçaõ dellas , e perturbar neſſe caſo ó movimento vertical das particulas vezinhas. Mas como o numero das particulas de huma camada que tocaõ as paredes he infinitamente pequeno em comparaçaõ do numero das outras , podem eſtas alterações ſuppor-ſe nullas , ſem erro ſenſivel.

Aſſim vemos , que eſtas duas ſuppoſições ſaõ muito admiſſiveis na parte ſuperior do vaſo. Porém na parte vezinha ao orificio eſtaõ muito longe da verdade ; porque, como aſſima diſſemos , todos os pontos fluidos ſe dirigem entaõ obliquamente para o orificio , e por conſeguinte naõ póde ſuppor-ſe que as meſmas particulas individuais formem huma meſma camada , cujos pontos ſe abaixem verticalmente. Aſſim naõ he poſſivel , que as circunſtancias do efluxo da agua calculadas por eſtas duas hypotheſes ſejaõ exactamente conformes á experiencia. Sem embargo , he facil de ver que os erros procedidos deſtas ſuppoſições devem ſeguir a meſma lei em todos os caſos , ao menos proximamente ; e deſte modo , conhecendo pela experiencia as correcções que ſe devem fazer aos reſultados theoricos , podem ſervir eſtes de muita utilidade na pratica. Debaixo deſta reſtricçaõ admittiremos aqui eſta theorica , porque tudo bem ponderado , parece que naõ ſe tem imaginado até agora couſa melhor para repreſentar o movimento dos fluidos por formulas analyticas , que naõ involvaõ calculos extremamente complicados.

236 Seja pois *A C D E* hum fluido ſujeito á acçaõ da gravidade em hum vaſo , do qual ſahe por hum orificio horizontal *p q* de qualquer grandeza aberto no fundo *C D* (Fig. 73.). Imaginemos eſte fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais , e iguais *A B b a* , *T V u t* &c , que ſe abaixaõ parallelamente a ſi meſmas , tendo cada huma a meſma velocidade vertical em toda a ſua extenſaõ. Todas eſtas camadas obraõ humas contra as outras ,

tras, ou comprimindo-se reciprocamente, ou arraſtando-ſe em virtude da adherencia que tem entre ſi; de maneira, que ſe a velocidade de humas he retardada de hum inſtante para outro, a velocidade das outras he accelerada. Succede neſte caſo ao movimento das particulas fluidas o meſmo que ao ſyſtema de muitos corpos ſolidos, dos quais nenhum póde mover-ſe ſem actuar ſobre os outros, e ſem experimentar a reacçaõ delles.

Iſto poſto, levante-ſe a vertical pE; e ſeja a altura conſtante do fluido $Ep = b$, a area do orificio $pq = K$, a area repreſentada pela linha AB, que he huma funçaõ de Ep, dada pela figura do vaſo $= M$, a altura indeterminada $EH = x$, a area repreſentada por TV, funçaõ dada de $x = y$, a velocidade da ſecçaõ do fluido que ſahe pelo orificio $= u$, a velocidade da ſecçaõ $TVut = v$, o tempo $= t$, e a gravidade $= g$. Aſſim, ſuppondo que no inſtante dt a velocidade v ſe faz $v + dv$ (dv póde ſer poſitivo, ou negativo), e reflectindo que ſe faria $v + gdt$ ſe as camadas naõ actuaſſem entre ſi, eſtá claro que ſendo $v + gdt = v + gdt + dv - dv$, todo o fluido ficaria em equilibrio, ſe cada huma das camadas naõ foſſe animada ſenaõ pela velocidade $gdt - dv$. Eſtas velocidades variaõ de huma camada para a outra, e por toda a extenſaõ da altura Ep deveremos ter $\int dx(gdt - dv) = o$; e porque $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, e $dt = \frac{dx}{v} = \frac{ydx}{Ku}$, teremos $\int \frac{gydx^2}{Ku} - \int \frac{Kdx(ydu - udy)}{yy} = o$.

237 Como o integral precedente deve tomar-ſe relativamente á altura Ep, e conſeguintemente u e du devem conſiderar-ſe para o caſo como conſtantes, e ſendo por outra parte ydx huma quantidade conſtante, podemos reduzir a noſſa equaçaõ a eſta fórma $\frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int \frac{dx}{y} + Kuydx\int \frac{dy}{y^2} = o$. Porém $\int dx$ vem a ſer b, $\int \frac{dx}{y}$ (ſupprindo convenientemente a homogeneidade) póde repreſentar a area, que chamaremos N, de huma curva conſtruida ſobre o eixo Ep, que tenha por ordenadas as differentes ſecçoens do vaſo, que correſpondem aos differen-

tes

tes pontos de Ep, $\int \frac{dy}{y^3}$ repreſenta a area de huma curva que deve deſvanecer quando $y = AB = M$, e ter o ſeu valor completo quando $y = K$, que ſerá conſeguintemente $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$, e em fim $y\,dx = AB\,ba = M.Ee$. Logo $2gbM^2.Ee - 2K^2MNudu + uu.Ee(K^2 - M^2) = 0$. Sendo pois s a altura devida á velocidade u, ſerá $uu = 2gs$, e ſubſtituindo eſte valor teremos finalmente

$$bM^2.Ee - K^2MNds + s.Ee.(K^2 - M^2) = 0.$$

238 Supponhamos agora, que o vaſo ſe conſerva conſtantemente cheio na altura pE; e para iſſo imaginemos que á medida que a ſuperficie AB ſe abaixa em hum inſtante até ab, e que ſahe conſeguintemente huma pequena quantidade de licor igual a $AB.Ee$, a camada $ABba$ he ſubſtituida por outra, creada (para o dizer aſſim) no ſeu lugar, e com a meſma velocidade della. Além diſto ſeja Kz o licor que ſahe pelo orificio K no tempo t, e teremos evidentemente $K\,dz = M.Ee$; donde ſe mudará a equaçaõ precedente neſta fórma

$$bM^2\,dz - KM^2N\,ds + (K^2 - M^2)\,s\,dz = 0,$$

na qual ſómente z e s ſaõ variaveis.

Se K for infinitamente pequeno, eſta equaçaõ ſe reduz a $bM^2\,dz = M^2\,s\,dz$, ou $b = s$, como tinhamos achado (n. 228.).

A equaçaõ precedente he facil de integrar. Porque fazendo $\frac{b}{KN} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{KM^2N} = f$, teremos $ds + fs\,dz = b\,dz$. Donde ſe tira, pelo methodo de que já nos havemos ſervido (n. 105.)

$$s = \frac{b}{f}\left(1 - e^{-fz}\right),$$

ſendo e o numero que tem por logarithmo a unidade, e completando-ſe o integral de maneira, que z e s deſvaneçaõ ao meſmo tempo.

239 Para conhecer a relaçaõ entre o tempo t e a velocidade u, ou a altura s que lhe he devida, obſervaremos

mos que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b-fs)\sqrt{2gs}}$. Fazendo $\frac{b}{f} = m^2$; e $s = y^2$; teremos $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{m^2-y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right)$, e por conseguinte $t = \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \cdot l\frac{m+y}{m-y} = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \cdot l\frac{\sqrt{b}+f\sqrt{s}}{\sqrt{b}-f\sqrt{s}}$; integral, que não carece de constante, porque $t = o$ dá $s = o$.

240 Do mesmo modo para conhecer a relação entre o tempo e o espaço corrido z, poremos na equação $dt = \frac{dz}{u}$ em lugar de u o seu valor $\sqrt{2gs}$, e em lugar de s o seu valor acima achado (n. 238.), e teremos

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}} \cdot \sqrt{(1-e^{-fz})}}.$$

Suppondo $1-e^{-fz} = xx$, será $dt = \frac{2}{\sqrt{2bgf}} \cdot \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right)$, e conseguintemente

$$t = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+\sqrt{(1-e^{-fz})}}{1-\sqrt{(1-e^{-fz})}};$$

integral completo, porque $z = o$ dá $t = o$, como deve ser.

Por meio desta equação se conhecerá a quantidade de agua, que sahe pelo orificio em hum tempo dado, porque essa quantidade he $= Kz$, que agora se póde exprimir por huma função do tempo, e de constantes.

241 O modo de entreter o vaso $ACDB$ constantemente cheio, que acima imaginamos (n. 238.), raras vezes póde ter lugar na pratica. Ha outro mais usado, que consiste em imaginar que a nova camada $AB\,b\,a$ ajuntada a cada instante, para reparar a despeza que se faz pelo orificio, he fornecida por huma affusão lateral, e que ella recebe a sua velocidade primitiva da camada immediata que

que a arraſta comſigo em virtude da tenacidade reciproca das partes do fluido. Entaõ he neceſſario fazer algumas mudanças no methodo precedente.

Conſervando todas as outras denominaçoens, ſupponhamos que a velocidade da camada $ABba$ he $= V$. Como ella, ſe foſſe deixada á acçaõ livre da gravidade, teria adquirido em hum inſtante dt a velocidade gdt, podemos conſiderar eſta velocidade gdt como compoſta da velocidade V e de outra velocidade $gdt - V$ que deve ſer deſtruida. Por conſeguinte, ſe houveſſe ſómente na camada $ABba$ a velocidade $gdt - V$, e nas outras a velocidade $gdt - dv$, todo o ſyſtema deveria ficar em equilibrio. Logo teremos $Ee.(gdt - V) + \int dx(gdt - dv) = 0$. Donde reſulta, deſprezando gdt em comparaçaõ de V, a equaçaõ $2gbM^2.Ee - 2KMVu.Ee - 2K^2MNudu + Ee.u^2(K^2 - M^2) = 0$. Em fim pondo em lugar de V o ſeu valor $\frac{Ku}{M}$, e praticando tudo o mais como no methodo antecedente, teremos

$$bM^2dz - (K^2 + M^2)sdz - KM^2Nds = 0;$$

equaçaõ da meſma fórma que a outra (n. 238.), e conſeguintemente ſuſceptivel de calculos analogos aos que della deduzimos. Bem ſe vê, que baſta tomar $f = \frac{K^2 + M^2}{KM^2N}$ em lugar de $f = \frac{M^2 - K^2}{KM^2N}$ para applicar as formulas que havemos deduzido ao caſo preſente.

242 A equaçaõ final do n. 237. póde tambem ſervir para achar o movimento de huma quantidade determinada de fluido dentro de hum vaſo, em virtude da gravidade, ou de hum impulſo primitivo, ou de ambas eſtas cauſas juntamente. Havendo imaginado que o fundo CD ſe aniquila, ou que $K = CD$, ſupponhamos que a porçaõ dada do fluido occupa no primeiro inſtante o eſpaço $SZKX$, e que no fim do tempo t tem chegado á poſiçaõ indeterminada $ACDB$. Eſtá claro, que chamando z o eſpaço OE corrido verticalmente pela ſuperficie do fluido, as quantidades M, K, N, b ſeraõ funçoens dadas de z e de conſtantes, porque he dada a figura do vaſo, e os eſpaços $SZKX$, $ACDB$ ſaõ iguais entre ſi. Donde ſe ſegue que a equa-

a equaçaõ que repreſenta o movimento do fluido ſerá ſempre deſta fórma

$$Z\,dz + AZ'ds + BsZ''dz = 0,$$

ſendo Z, Z', Z'' funçoens de z, e A, B quantidades conſtantes. Eſta equaçaõ ſe integrará, de maneira, que ſatisfaça á condiçaõ da velocidade inicial de qualquer ſecçaõ dada do fluido; e ſendo achada a relaçaõ entre s e z, facilmente ſe achará t em s, ou em z.

Quando o fluido naõ for pezado, o primeiro termo da equaçaõ, que he relativo a eſta força, ſe deſvanece; e a equaçaõ fica muito mais ſimples.

243 O methodo, que até agora havemos expoſto, applica-ſe muito bem aos orificios horizontais; mas naõ ſuccede o meſmo nos laterais. Eſtes contribuem muito a perturbar o paralleliſmo das camadas; e além diſſo, as particulas fluidas que ſahem por elles naõ tem todas a meſma velocidade, porque as mais diſtantes da ſuperficie do fluido ſe movem neceſſariamente com mais velocidade. Entaõ o methodo mais ſimples, e que dá reſultados ſufficientemente conformes á experiencia, he o ſeguinte.

244 Como temos viſto, que o fluido ſahe por hum orificio lateral infinitamente pequeno do meſmo modo que por hum horizontal ſituado em igual diſtancia da ſuperficie do fluido (n.230.); quando o orificio lateral for de grandeza conſideravel podemos ſuppollo dividido em huma infinidade de rectangulos, ou trapezios horizontais, e conſiderar cada hum delles como hum orificio infinitamente pequeno. Deſignando pois cada hum deſtes elementos por dS, e a quantidade total de fluido que dá o orificio no tempo t por Q, a altura do fluido reſpectiva ao elemento dS por z, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo por a; teremos (n. 233.) $Q = 2tV a.\int dS V z$.

245 Exemplo I. *Determinar a quantidade de fluido que em hum tempo dado ſahe pelo orificio rectangular vertical LNOM praticado em huma das paredes de qualquer vaſo* (Fig.74.).

Seja a altura do fluido acima da parte ſuperior $VK = b$, $VR = H$, $LM = f$, $LX = x$, e conſeguintemente $VI = z = b + x$, $XZ = x = dS = f\,dx$. Logo teremos $Q = 2tVa.\int f\,dx\,V(b+x)$; e tomando eſte integral entre os limites $x = 0$, e $x = H - b$, teremos finalmente

$Q =$

$$Q = \frac{4}{3} f t \left(H \sqrt{H - b} \sqrt{b} \right) \sqrt{a}.$$

Donde ſe vê, que das ſinco quantidades H, b, f, t, Q, ſendo dadas quatro, a quinta ſe póde ſempre determinar por eſta equaçaõ.

246 Supponhamos, que y he a *altura media* da agua acima de hum ponto I do orificio, iſto he, huma altura tal, que ſe todos os pontos do fluido que ſahem pelo orificio tiveſſem a meſma velocidade que tem os pontos que ſahem pela horizontal XIx, em igual tempo ſahiſſe huma quantidade de agua igual á que dá o meſmo orificio com as velocidades naturais, ſegundo a hypotheſe deſte problema. Aſſim teremos $Q = 2tf(H-b)\sqrt{ay}$ (n.233.); e igualando entre ſi os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{4(H\sqrt{H-b}\sqrt{b})^2}{9(H-b)^2}.$$

Eſta altura differe pouco da diſtancia do centro de gravidade do orificio á ſuperficie do fluido, a qual he $= \frac{H+b}{2}$; de maneira que ſendo $b = 0$, temos $y = \frac{4}{9}H$, ſendo a differença $\frac{1}{18}$ da altura do orificio KR. Quanto mais eſtiver levantada a ſuperficie da agua acima da baſe ſuperior do orificio, tanto menor ſe fará eſta differença; e conſeguintemente na pratica póde tomar-ſe por altura media a diſtancia do centro de gravidade do orificio á ſuperficie do fluido.

247 Exemplo II. *Determinar a quantidade de fluido, que em hum tempo dado ſahe pelo orificio vertical LNM, aberto em fórma de triangulo iſoſceles, com a baſe LM horizontal* (Fig. 75.).

Seja a baſe do triangulo $LM = f$, a altura do fluido acima della $VR = H$, e acima do vertice $VN = b$. Tomando na recta NR huma abſciſſa x, e tirando huma ordenada parallela á baſe LM, ſerá a ſua expreſſaõ $\frac{fx}{H-b}$, e conſeguintemente $dS = \frac{fx\,dx}{H-b}$, e $x = b + x$. Logo $Q = \frac{2tf\sqrt{a}}{H-b}\int x\,dx\sqrt{(b+x)}$; e tomando eſte integral

tegral entre os limites de $x = o$, e $x = H - b$, teremos a equaçaõ

$$Q = \frac{4ft(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

248 Sendo y a altura media da agua, acharemos $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando entre ſi os dous valores de Q, reſultará

$$y = \frac{16(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})^2}{225(H-b)^4}.$$

Eſte valor differe muito pouco da diſtancia do centro de gravidade do triangulo á ſuperficie do fluido; porque no caſo da maior differença quando $b = o$, he de $\frac{2}{25}$ de NR, e quando o fluido eſtá elevado conſideravelmente acima de N, eſta differença vem a ſer inſenſivel.

249 Exemplo III. *Determinar a quantidade de fluido que ſahe pelo orificio triangular, e iſoſceles LMN, que tem a baſe LM horiſontal, e o vertice N para a parte de baixo* (Fig. 76.).

Seja $VN = H$, $VR = b$, $LM = f$; e tomando na recta NR huma abſciſſa x, teremos $dS = \frac{fx\,dx}{H-b}$, e $z = H - x$. Logo $Q = \frac{2ft\sqrt{a}}{H-b}\int x\,dx\sqrt{(H-x)}$; e tomando eſte integral entre os limites de $x = o$, e $x = H - b$, teremos

$$Q = \frac{4ft(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

250 Suppondo a altura media da agua acima do orificio $= y$, ſerá $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{16(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})^2}{225(H-b)^4};$$

valor, que differe muito pouco da diſtancia do centro de gravidade do triangulo á ſuperficie da agua. A ſua maior

maior differença, quando $b = 0$, he $\frac{11}{225}$ de $N.R.$

251 Exemplo IV. *Determinar a quantidade de licor que sahe por hum orificio vertical circular LMNP em hum tempo dado* (Fig. 77.).

Seja o raio $OL = r$, a rasaõ entre a altura do fluido acima do centro OV e o raio $= n$, isto he, $OV = nr$, e o angulo $LOQ = x$. Assim teremos $QR = r \operatorname{sen} x$, $LR = r - r \cos x$, $Rr = r\,dx \operatorname{sen} x$, e $VR = nr - r \cos x$. Logo $dS = 2r^2\,dx \operatorname{sen} x^2$, $z = nr - r \cos x$; e conseguintemente

$$Q = 4tr^2 \sqrt{ar} . \int dx \operatorname{sen} x^2 \sqrt{(n - \cos x)}.$$

Para integrarmos actualmente o segundo membro, reflectiremos que $dx \operatorname{sen} x^2 \sqrt{(n - \cos x)} = dx(1 - \cos x^2)(n - \cos x)^{\frac{1}{2}} = dx(1 - \cos x^2)\left(n^{\frac{1}{2}} - \frac{\cos x}{2n^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos x^2}{8n^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos x^3}{16n^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\cos x^4}{128n^{\frac{7}{2}}} - \frac{7\cos x^5}{256n^{\frac{9}{2}}} \&c\right) = n^{\frac{1}{2}}dx\left(1 - \cos x^2 + \frac{\cos x^3 - \cos x}{2n} + \frac{\cos x^4 - \cos x^2}{8n^2} + \frac{\cos x^5 - \cos x^3}{16n^3} + \frac{5\cos x^6 - 5\cos x^4}{128n^4} \&c\right)$. Porém temos em geral $\cos x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, $\cos x^3 = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$, $\cos x^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$, &c; valores que devem ser substituidos na equaçaõ precedente, para se proceder á integraçaõ em geral. Mas reflectindo, que para o orificio inteiro havemos de tomar o integral entre os limites $x = 0°$, e $x = 180°$, podemos desprezar na substituiçaõ todos os termos que contém $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ &c, porque estes na integraçaõ deveráõ dar $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen} 3x$ &c, que nos ditos limites saõ $= 0$. Assim podedemos fazer $\cos x^2 = \frac{1}{2}$, $\cos x^3 = 0$, $\cos x^4 = \frac{3}{8}$, $\cos x^5 = 0$,

$= 0$, $cof\, x^6 = \frac{5}{16}$ &c; e teremos $dx\, fen\, x^2 \sqrt{(n - cof\, x)}$

$= \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} dx \left(1 - \frac{1}{32\, n^2} - \frac{5}{1024\, n^4} \text{ &c} \right)$. E porque o integral ſe ha de tomar entre os limites $x = 0$, e $x = c$, ſendo c a ſemicircumferencia do circulo que tem por ſemidiametro a unidade, teremos finalmente

$$Q = 2\, c\, t\, r^2 \left(1 - \frac{1}{32\, n^2} - \frac{5}{1024\, n^4} \text{ &c} \right) \sqrt{a\, n\, r}.$$

Eſta ſerie he taõ convergente, que por pouco que n exceda a unidade, os tres primeiros termos ſeraõ mais que ſufficientes na pratica.

252 Sendo y a altura media da agua, teremos $Q = 2\, c\, t\, r^2 \sqrt{a\, y}$; e igualando entre ſi os dous valores de Q, acharemos

$$y = n\, r \left(1 - \frac{1}{16\, n^2} - \frac{9}{1024\, n^4} \text{ &c} \right);$$

e eſte valor coincide ſenſivelmente com VO, quando n excede ſenſivelmente a unidade.

253 Quando a ſuperficie da agua eſtá ao livel da extremidade ſuperior do diametro LN (Fig. 78.), iſto he, quando $n = 1$, a formula que achamos dará tambem o valor de Q. Mas entaõ póde integrar-ſe a expreſſaõ $dx\, fen\, x^2 \sqrt{(1 - cof\, x)}$ em termos finitos, e algebricos. Porque fazendo $1 - cof\, x = u$, teremos $\int dx\, fen\, x^2 \sqrt{(1 - cof\, x)} = \int u\, du \sqrt{(2 - u)} = u \int du \sqrt{(2 - u)} - \int du \int du \sqrt{(2 - u)} = - \frac{2u(2-u)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-u)^{\frac{5}{2}}}{15} =$

$- \frac{2\, fen\, x^2 (1 + cof\, x)^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{4(1 + cof\, x)^{\frac{5}{2}}}{15}$. Tomando pois o valor deſta expreſſaõ entre os limites de $x = 0°$, e $x = 180°$, e multiplicando o reſultado pelo coefficiente $4\, t\, r^2 \sqrt{a\, r}$, teremos neſte caſo

$$Q = \frac{64\, t\, r^2 \sqrt{2\, a\, r}}{15}.$$

Faltava ainda dar huma formula para quando a ſuperficie

ſuie da agua eſtá debaixo do ponto *L*. Mas neſſe caſo, naõ ſendo a ſuperficie da agua ſuſtentada pela parede do vaſo no lugar do orificio, abaixa-ſe ſenſivelmente para a parte do meio, altéra a raſaõ natural das velocidades, e ſerve de embaraço á theorica, pela qual ſe naõ póde dar a ſoluçaõ deſte caſo, ſenaõ de hum modo muito imperfeito.

254 Eſtes exemplos baſtaõ para ſe entender o modo de determinar o deſaguamento dos fluidos por hum ſó orificio. Quando o fluido ſahir por muitos ao meſmo tempo, ſendo todos pequenos, naõ ha difficuldade nenhuma de novo. Cada hum ſe calcula ſeparadamente, como ſe foſſe ſó. Mas ſempre deve obſervar-ſe que hum orificio pequeno na vezinhança de outro maior, dá hum pouço menos á proporçaõ do que elle, como adiante moſtraremos pela experiencia.

Paſſemos á ſoluçaõ de differentes problemas relativos ao deſaguamento de vaſos atraveſſados vertical, ou horizontalmente por muitos diaphragmas, problemas curioſos em ſi meſmos, e que tem applicações frequentes na pratica.

255 Probl. I. *Suppondo que os vaſos A B C D, F C E G, H E L K* (Fig. 79.), *communicaõ entre ſi pelas pequenas aberturas C, E, e que o fluido ſahe pelo orificio L; achar as velocidades em C, E, L, e a quantidade de licor que ſahe por L, quando o movimento tem chegado á uniformidade, e conſeguintemente deitando-ſe tanta agua no primeiro vaſo quanta ſahe do ultimo, as alturas AB, CF, EH ficaõ conſtantemente as meſmas.*

Por quanto as aberturas *C, E, L* ſaõ muito pequenas em comparaçaõ das amplitudes dos vaſos, he evidente que a pequena maſſa de fluido que por ellas paſſa a cada inſtante naõ produzirá abalo ſenſivel no fluido dos ditos vaſos, e que hum tal abalo naõ póde alterar ſenſivelmente as velocidades em *C, E, L*, ſobre tudo quando eſtas aberturas naõ eſtaõ em linha recta. E porque o fluido *C F O B* faz equilibrio com *C F G E*, e *E H Q C* com *E H K L* (n.35.), ſeraõ as velocidades em *C, E, L* devidas reſpectivamente ás alturas *D F, G H*, K *L*. Pelo que ſuppondo *D F* $= x$, *G H* $= y$, K *L* $= z$, *A B* $= b$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, e a quantidade de licor que paſſa no tempo *t* por cada hum

dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tC\sqrt{ax} = 2tE\sqrt{az} = 2tL\sqrt{ay}$, e $x + y + z = b$. Donde ſe tira

$$x = \frac{L^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$y = \frac{C^2 L^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$z = \frac{C^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$Q = \frac{2tL . CE . \sqrt{ab}}{\sqrt{(C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2)}} .$$

Do meſmo modo ſe procederia no caſo de haver maior numero de vaſos. Se os orificios foſſem de grandeza conſideravel ſeria neceſſario recorrer ao methodo geral (n. 235, e ſeg.); mas neſte problema e outros ſemelhantes chegariamos a calculos quaſi intrataveis da parte da Analyſe.

256 PROBL. II. *Determinar a lei, pela qual ſobe o fluido nos vaſos FE, HL do problema precedente, em quanto o deſaguamento naõ tem chegado a hum eſtado regular, e permanente.*

Sejaõ primeiramente dous vaſos priſmaticos BD, CG (Fig. 80.) communicantes pelo pequeno orificio C, e o primeiro ſeja entretido ſempre cheio conſtantemente até AD, em quanto o ſegundo lança o licor pelo pequeno orifi cio E. Supponhamos, que paſſado certo tempo t a ſuperficie do fluido no vaſo CG ſe acha em NO, e que no inſtante ſeguinte ſobe até no. Fazendo $CD = b$, $DN = x$, a area da ſecçaõ $NO = A$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$; he evidente, que no inſtante dt as alturas devidas ás velocidades em C, E ſaõ x, e $b - x$ (n. 228.). Donde ſe ſegue (n. 233.), que no inſtante dt ſahirá pelo orificio C a quantidade de agua $2C\,dt\sqrt{ax}$, e pelo orificio E a quantidade $2E\,dt\sqrt{[a(b-x)]}$: porém a differença deſtas quantidades he evidentemente igual a $NOon$; logo $2Cdt\sqrt{ax} - 2Edt\sqrt{[a(b-x)]} = Adx$, e conſeguintemente

$$dt = \frac{A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{E\sqrt{(b-x)} - C\sqrt{x}} .$$

Suppon-

Supponda primeiramente $x = \frac{yy}{b}$, e depois $EV(bb - yy) - Cy = Ez$, reduziremos a equaçaõ precedente a eſta fórma

$$dt = Hdz + \frac{Mdz}{z} + \frac{Nzdz}{V(P^2 - z^2)} + \frac{Qdz}{zV(P^2 - z^2)},$$

na qual H, M, N, P, Q ſaõ conſtantes faceis de determinar. O ultimo termo, no qual ſómente póde haver embaraço, integra-ſe fazendo $z = \frac{P^2}{u}$. Deſte modo acharemos

$$\int \frac{Qdz}{zV(P^2 - z^2)} = \int \frac{-Qdu}{PV(u^2 - P^2)} = -\frac{Q}{P} l(u + V(u^2 - P^2)).$$

Aſſim podemos ſempre achar o valor de t em x. Mas he de advertir, que o fluido deve ter na origem do movimento huma certa altura no vaſo CG, para que a agua que entra pelo orificio C naõ produza abalo ſenſivel no fluido que elle contêm. A eſta condiçaõ ſe ſatisfará, determinando a conſtante, que deve completar o integral, de maneira que quando $t = o$ tenha DN hum valor dado, menor do que b.

257 Seja agora qualquer numero de vaſos BD, CG, EK, LR (Fig. 81.), e com as meſmas condiçoens. Suppondo $DC = b, DN = x, OP = y, SQ = z, RM = u$; a area da ſecçaõ $NO = A$, de $PS = B$, de $LR = R$; pelo que acabamos de moſtrar, teremos as equaçoens ſeguintes

$$2CdtVax - 2EdtVay = -Adx$$
$$2EdtVay - 2LdtVaz = -Bdy$$
$$2LdtVaz - 2MdtVau = -Rdz$$
$$x + y + z + u = b.$$

Todas eſtas equaçoens combinadas entre ſi daraõ o valor de t em x, ou y, ou z, ou u, e conſeguintemente determinaráõ as alturas do fluido nos vaſos CG, EK, LR para qualquer tempo dado; mas os calculos ſeraõ muito complicados.

258 O problema elegante reſolvido por *M.* de Montucla he muito analogo ao preſente: *Suppondo que o vaſo BD he hum regato, ou manancial, que em tempos iguais introduz*

troduz pela abertura C quantidades iguais de agua no vaſo CG, o qual deixa ſahir parte della pela abertura E; determinar o movimento da ſuperficie do fluido NO no meſmo vaſo (Fig. 80.).

Como neſte caſo a velocidade em C he devida a huma altura conſtante b, ſuppondo $CN = x$, e conſervando as outras denominaçoens acima eſtabelecidas (n.256.), teremos $2C\,dt\sqrt{ab} - 2E\,dt\sqrt{ax} = A\,dx$, ou $dt = \frac{-A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$. Seja $x = yy$; e acharemos $t = \int \frac{A}{E\sqrt{a}} \left(-dy + \frac{C\sqrt{b}\,.\,dy}{C\sqrt{b} - Ey} \right) = M - \frac{Ay}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}} \cdot l\,(C\sqrt{b} - Ey) = M - \frac{A\sqrt{x}}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}}\, l\,(C\sqrt{b} - E\sqrt{x})$.

A conſtante M deve determinar-ſe de maneira, que quando $t = 0$, tenha x hum valor dado.

A quantidade de agua que no tempo t ſahe pela abertura E ſerá repreſentada por $\int 2E\,dt\sqrt{ax} = EA \int \frac{dx\sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}} = N + A\left[-x - \frac{2C\sqrt{b}\,x}{E} - \frac{2C^2 b}{E^2}\, l\,(C\sqrt{b} - E\sqrt{x}) \right]$.

259 PROBL. III. *Sendo o vaſo AV* (Fig. 82.) *conſtantemente cheio de licor até a altura AI, e atraveſſado dos diaphragmas BC, ZT, IV furados com pequenas aberturas M, N, P; determinar as velocidades do fluido em cada huma dellas, e a quantidade de agua que por ellas paſſa em hum tempo dado.*

Eſtá claro, que o fluxo natural da agua em M he embaraçado em parte pela reſiſtencia da agua inferior, e que o fluido correrá por M do meſmo modo que paſſaria por hum orificio lateral $C = M$ para hum vaſo CG, no qual a altura da agua CF exprimiſſe a reſiſtencia que cada ponto da agua em M experimenta da parte da agua inferior. E porque a reacçaõ he igual e contraria á acçaõ, a agua BT ſerá comprimida em todos os ſeus pontos pela agua ſuperior com huma força proporcional a CF; e por conſeguinte, ſe naõ encontraſſe reſiſtencia na agua inferior, correria em N com huma velocidade devida á altura TF, ou do meſmo modo que correria no vaſo lateral TG por huma abertura

tura $E = N$. Aſſim, ſendo TQ a altura proporcional á reſiſtencia, que cada ponto da agua em N encontra na agua inferior, o fluxo em N ſe fará do meſmo modo que no vaſo QG por huma abertura $H = N$. Do meſmo modo ſe vê, que em P correrá da meſma maneira que no vaſo SK por hum orificio $L = P$, ſendo a altura $SH = VQ$.

Iſto poſto, fazendo $AI = b$, $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, a quantidade de agua que no tempo t paſſa por cada hum dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax} = 2tN\sqrt{ay} = 2tP\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde ſe tira, como no Problema I,

$$x = \frac{N^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$y = \frac{M^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$Q = \frac{2tP . MN . \sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2)}};$$

e do meſmo modo ſe procederia, havendo mais diaphragmas.

260 Quando a ultima abertura P he muito pequena em comparaçaõ das outras, teremos ſenſivelmente $x = \frac{P^2 . b}{M^2}$, $y = \frac{P^2 . b}{N^2}$, $z = b$, $Q = 2tP\sqrt{ab}$. Donde ſe vé, que o deſaguamento em P he como ſe naõ houveſſe diaphragmas; e aſſim deve ſer, porque a figura do vaſo he indifferente, quando a abertura por onde ſahe o fluido he infinitamente pequena a reſpeito de todas as amplitudes horizontais do meſmo vaſo.

261 Pelo contrario, ſe as aberturas M, N forem muito pequenas em comparaçaõ de P, teremos ſenſivelmente $z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tMN\sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e conſeguintemente a velocidade, e producto do orificio ſeraõ muito menores. Donde ſe vê, quanto ſaõ prejudiciais á altura, e pro-

producto das fontes de repuxo os obſtaculos, que frequentemente ſe formaõ nos canos; e quanto he neceſſario na conſtrucçaõ das bombas aumentar os diametros das valvulas, quanto for poſſivel, a reſpeito dos orificios por onde ellas devem deſaguar.

262 Se os tres orificios forem iguais, teremos $x = y = z = \frac{1}{3} b$, e $Q = \frac{2 t P \sqrt{a b}}{\sqrt{3}}$. Donde ſe vê, que o producto do orificio P ſerá para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para $\sqrt{3}$. Em géral, ſendo dados os orificios M, N póde o terceiro P fazer-ſe tal, que o producto delle ſeja para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para qualquer numero n. Para ſatisfazer a eſta condiçaõ, teremos $\frac{n . M N}{\sqrt{(M^2 N^2 + M^2 P^2 + N^2 P^2)}} = 1$; donde ſe tira $P = \frac{M N \sqrt{(n n - 1)}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e quando as aberturas M, N ſaõ iguais, $P = M \sqrt{\frac{n n - 1}{2}}$.

Eſtas, e muitas outras applicaçoens, que facilmente ſe podem fazer, igualmente convem ás formulas do Prroblema I.

263 He de advertir, que a ſoluçaõ naõ terá lugar, quando o fluido naõ formar huma maſſa continua no interior do vaſo. E poſto que a preſſaõ do ar que obra de baixo para cima em P, e de cima para baixo na ſuperficie AD, ſe oppoem á ceſſaçaõ de continuidade; póde com tudo ſucceder que eſta ſe effeitue em certos caſos. Por exemplo: Se a abertura P, ainda que pequena, for muito maior que as outras duas, póde ſucceder que ſendo conſideravel a altura ZI do repartimento inferior, a preſſaõ que delle reſulta ſobre o orificio P ſeja maior do que convinha, para que a agua que paſſa por N em virtude da preſſaõ da agua ſuperior, e da adherencia com a inferior que procura arraſtalla comſigo, poſſa ſupprir a que ſahe por P. Neſſe caſo formar-ſe-ha hum vazio $XYTZ$, que ſe irá enchendo do ar que traz comſigo a agua que cahe do orificio N; e o fluido ſahirá por P, como ſe o vaſo $IXYV$ foſſe independente, e entretido conſtantemente cheio na altura IX. O meſmo póde ſucceder nos repartimentos ſuperiores.

264

264 PROBL. IV. *Paſſando o licor do vaſo AC, cheio conſtantemente até AB, pelo orificio M para o vaſo lateral CG, donde ſómente póde ſahir por duas pequenas aberturas N, P; achar as velocidades em M, N, P, e as quantidades de fluido que por eſtas aberturas paſſaõ em hum tempo dado* (Fig. 83.).

Supponhamos que o licor em *M* encontra da parte da agua do vaſo *CG* huma reacçaõ repreſentada por *MH*: e facilmente veremos, que conduzindo as horizontais *NV*, *HK*, ſeraõ as velocidades em *M*, *N*, *P* devidas ás alturas *DH*, *HV*, *HC*. Aſſim fazendo $DC = b$, $DV = b$, $DH = x$, e repreſentando por Q, Q', Q'' as quantidades de agua que no tempo t paſſaõ por *M*, *N*, *P*, teremos $Q = 2tMV ax$, $Q' = 2tNV[a(b-x)]$, $Q'' = 2tPV[a(b-x)]$, e $Q' + Q'' = Q$. Eſtas equaçoens daõ

$$MV x = NV(b-x) + PV(b-x),$$

que ſe reduz a huma equaçaõ do ſegundo gráo, da qual ſe tirará o valor de x; e conhecendo x, acharemos os valores de HV, HC, Q, Q', Q''.

265 As alturas HV, HC devidas ás velocidades em *N*, *P* ſaõ evidentemente as das columnas, que comprimiriaõ perpendicularmente as paredes do vaſo *CG* nos meſmos lugares, ſe os orificios *N*, *P* ſubitamente ſe tapaſſem. Aſſim, quando ſahe o licor por *N*, *P*, ſerá a preſſaõ de huma parte *X* tomada em hum lugar dado repreſentada por $X.HC$. Por exemplo: Supponhamos *P* infinitamente pequeno, ou $P = 0$; e a equaçaõ geral $MV x = NV(b-x) + PV(b-x)$ ſe reduzirá a $MV x = NV(b-x)$, e dará $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$. Por conſeguinte teremos $CH = b - x = \frac{M^2 b + N^2(b-b)}{M^2 + N^2}$, e a preſſaõ de $X = \frac{X[M^2 b + N^2(b-b)]}{M^2 + N^2}$.

Do meſmo modo ſe determinará a preſſaõ em qualquer outro lugar do meſmo vaſo *CG*, e do outro *BD*: bem entendido, que eſta determinaçaõ ſuppoem que as aberturas *M*, *N*, *P* ſaõ muito pequenas, e que as aguas eſtaõ como eſtagnantes em ambos os vaſos. Quando as aberturas

ras forem conſideraveis, uſaremos do Problema ſeguinte.

266 PROBL. V. *Determinar a preſſaõ, que hum licor exercita contra as paredes de hum vaſo, quando corre pelo interior delle* (Fig. 73.).

Suppondo a hypotheſe, a conſtrucçaõ, e as denominaçõe do nº 236, a velocidade com que cada camada deveria tender a mover-ſe, para haver equilibrio, he $g\,dt - dv$, e conſeguintemente a força correſpondente $g - \frac{dv}{dt}$. Donde ſe vê, que as camadas ſe comprimem com as forças $g - \frac{dv}{dt}$ do meſmo modo que as camadas de hum fluido em quietaçaõ ſe comprimem em virtude da gravidade. Logo na profundidade $EH = x$, a preſſaõ de cada hum dos pontos da camada $TVut$ he repreſentada por $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; e eſta força he a que ſe communica perpendicularmente aos elementos das paredes Tt, Vu. Porém $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g.EH - \int\frac{dx\,dv}{dt}$; e ſubſtituindo por dv o ſeu valor $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, temos $\int\frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt}\int\frac{dx}{y} - \frac{K\,u\,y\,dx}{dt}\int\frac{dy}{y^3}$; expreſſaõ, na qual a area repreſentada por $\int\frac{dx}{y}$ que chamaremos Q, deve ſer a que correſponde a EH, e $\int\frac{dy}{y^3}$ deve deſvanecer quando $y = AB$, e tomar o ſeu valor completo quando $y = TV = H$. Logo, metendo por $y\,dx$ o ſeu valor $M.Ee$, acharemos para a profundidade EH o valor da preſſaõ $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g.EH - \frac{K\,Q\,du}{dt}$ $\frac{K\,u.Ee.(H^2 - M^2)}{2\,dt.H^2\,M^2}$, no qual ſe ſubſtituiráõ os valores de u e dt em cada caſo.

267 Se

267 Se o valor da preſſaõ em qualquer lugar do vaſo ſahir negativo, he ſinal de que o fluido ceſſará de ſer continuo, e ſe dividirá em partes. Eisaqui huma experiencia de M. Daniel Bernoulli, que o moſtra aos olhos (Fig. 84.).

No fundo de hum vaſo cylindrico *A F* eſtá applicado hum tubo conico *D H*, guarnecido de hum pequeno tubo lateral *l*, no qual encaixa a extremidade de hum canudo curvo *l m n*, que tem a outra extremidade mergulhada no vaſo de agua *M*. He *C A* de 46 linhas, *E l* de 4, *l H* de 33 e meia, *l m n* de 66, e a ſecçaõ do tubo conico em *l* he para o orificio *G H* como 10 para 16. Tapando o orificio *G H*, e enchendo conſtantemente de agua o vaſo *A F*, eſta corre pelo canudo *l m n* para o vaſo *M*. Entaõ deſtapando *G H*, a agua do vaſo *M* ſobe pelo canudo *n m l*, e vem deſaguar por *G H*, até elle ſe eſgotar; e ſe abrirmos ſomente huma parte do orificio *G H*, poderemos fazer que a agua ſuba ou deſça por *n m l* a noſſo arbitrio. Quando ella ſobe, he porque a preſſaõ no tubo conico em *l* ſe faz negativa, e conſeguintemente a preſſaõ da atmosfera ſobre a ſuperficie do vaſo obriga a agua delle a ſubir. A meſma preſſaõ embaraça neſte caſo a ſeparaçaõ das partes do fluido.

268 Pelos meſmos principios ſe póde determinar a força neceſſaria para ſuſtentar hum vaſo, que lança agua por qualquer orificio *p q* (Fig. 73.). Porque eſta força he igual á ſoma dos productos de cada camada multiplicada pela força, em virtude da qual eſtaria em equilibrio, pela meſma raſaõ que a força neceſſaria para ſuſtentar hum fluido grave em quietaçaõ he igual á ſoma dos productos de cada camada multiplicada pela gravidade. Logo a força procurada ſerá repreſentada por $\int y\,dx\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=\int g y\,dx-\int\frac{y\,dx\,dv}{dt}$. A primeira parte he o pezo do meſmo fluido, e a ſegunda ſe acha ſem difficuldade pelo que temos dito.

269 Probl. VI. *Sendo o vaſo A D conſtantemente cheio de agua até A B, e movido verticalmente por meio do pezo R applicado a huma corda naõ pezada, que paſſa pelas roldanas fixas M, N; determinar a preſſaõ que o fluido exercita*

ta ſobre fundo , e conſeguintemente a quantidade que deſaguará pelo pequeno orificio p q (Fig. 85.).

Seja P a maſſa total do vaſo e do fluido , e G o ſeu centro de gravidade ; e ſupponhamos , que havendo de correr os corpos R, P em hum inſtante os eſpaços iguais *Rt*, *Gy* em virtude da gravidade , pela acçaõ reciproca que tem entre ſi deſcrevem os eſpaços tambem iguais *Rr*, *Gy*. Affim conſta da Mechanica , que fazendo a gravidade natural $Rt = g$, e $Gy = p$, teremos $R(g - p) = P(g + p)$, donde ſe tira $p = \frac{g(R - P)}{R + P}$, e os dous corpos ſe moverãõ com movimento uniformemente accelerado. E porque a força , que obra ſobre cada particula da maſſa P para baixo para cima , he $g + p = \frac{2gR}{R + P}$; eſtá claro , que imprimindo-ſe hum movimento igual e contrario no ſitio ma de todas as particulas , deveria ficar em equilibrio. Neſte caſo pois , em virtude da força $\frac{2gR}{R + P}$ que obra verticalmente de cima para baixo ſobre cada particula do fluido , deve reſultar em cada ponto do fundo *C D* huma preſſaõ que he para a preſſaõ que experimentaria ſe o fluido foſſe unicamente ſujeito á acçaõ da gravidade , como $\frac{2gR}{R + P}$ para g, ou como $2R$ para $R + P$. Mas a preſſaõ ſobre a area pq em virtude da gravidade he $p' . pq . bq$, ſendo p' o pezo eſpecifico do fluido. Logo na hypotheſe do noſſo problema ſerá a preſſaõ da meſma area $= p' . pq . bq . \frac{2R}{R + P}$; e ſahindo o fluido por pq, a ſua velocidade ſerá devida á altura $\frac{2R .}{R +}$.

Affim , para determinar a quantidade de fluido que deve ſahir no tempo t, naõ he neceſſario mais que uſar da formula do nº 233 , na qual ſubſtituiremos $\frac{2R . b}{R + P}$ em lugar

de b, conſervando as mais denominações; e teremos $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

270 Pela equaçaõ $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$ ſe vê 1°, que ſendo $R = P$, teremos $p = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. Entaõ o vaſo eſtará em quietaçaõ, e deſaguará como no nº 233. O meſmo ſuccederia, ſe o vaſo ſe moveſſe verticalmente com movimento uniforme.

2°, Sendo $R = 0$, teremos $\frac{2R}{R+P} = 0$. Neſte caſo deſvanece a preſſaõ, e o fluido naõ ſahirá por pq, como he por outra parte evidente; porque entaõ todos os pontos do fluido deſceráõ em virtude da gravidade natural com a meſma velocidade.

3°, Sendo P infinitamente pequeno em comparaçaõ de R, teremos $\frac{2R}{P+R} = 2$, e $Q = 2tK\sqrt{2ab}$, ſendo neſte caſo o producto do orificio para o que daria, ſe eſtiveſſe em quietaçaõ, como $\sqrt{2}$ para 1.

4°, Sendo $P > R$, o pezo P deſcerá, e R ſubirá. Neſte caſo, para determinar o movimento deve tomar-ſe p negativo. Mas a velocidade em pq ſerá, como no primeiro, devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$, e a quantidade de agua que ſahe pelo orificio ſerá ſempre determinada pela equaçaõ $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

271 Probl. VII. *Suppondo que o vaſo AC* (Fig. 86.) *ſe move pelo plano horizontal DQ em virtude da acçaõ do pezo R: achar a preſſaõ que o fluido nelle incluido exercita em qualquer elemento da parede T t, e a velocidade com que ſahiria por elle.*

Seja P a ſoma das maſſas do vaſo e do fluido, $Rt = g$ o eſpaço que R andaria livremente em hum inſtante, $Rr = Cc = p$ o eſpaço que andaõ effectivamente os dous corpos P, R; e teremos $R(g-p) = Pp$, ou $p =$

$= \frac{gR}{R+P}$. Logo cada particula do fluido he ſollicitada na direcçaõ DQ por huma força $\frac{gR}{R+P}$; e por conſeguinte, ſe huma força igual e contraria ſe imprimiſſe no ſyſtema, ficaria eſte em quietaçaõ. Neſte ultimo caſo, cada particula he ſujeita á acçaõ de duas forças, huma vertical g, e a outra horizontal $\frac{gR}{R+P}$, cuja reſultante he $g.\frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$. Aſſim, para haver equilibrio, he neceſſario que a ſuperficie do fluido ſeja perpendicular a eſta reſultante (n. 32.); e porque ella he ſempre conſtante em quantidade e direcçaõ, a ſuperficie do fluido ſerá hum plano inclinado OM tal, que conduzindo a horizontal OE para a vertical ME, tenhamos $\frac{OM}{OE} = \frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$.

Iſto poſto, ſe de qualquer ponto T das paredes do vaſo ſe tirar TZ perpendicular a OM, eſtá claro que a preſſaõ do elemento Tt ſerá para a que elle experimentaria na profundidade TZ em hum vaſo poſto em quietaçaõ, como $\frac{g\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$ he para g, ou como $\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}$ para $R+P$. Logo ſerá a preſſaõ no noſſo caſo $= Tt.TZ.\frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$; e conhecida eſta, facil he determinar a altura devida a velocidade com que o fluido ſahiria pelo orificio Tt, e a quantidade que deitaria em hum tempo dado, ſuppondo que por huma affuſaõ lateral ſe conſervava ſempre com huma quantidade conſtante de fluido.

Se o movimento do pezo R ceſſar, ou ſe vier a ſer uniforme, a ſuperficie do fluido naõ continuará na poſiçaõ inclinada, mas por-ſe-ha horizontal. Porque entaõ temos $p = o$, e as particulas naõ ſeraõ ſollicitadas, ſenaõ pela força unica da propria gravidade.

272 PROBL. VIII. *Determinar o effeito da fricçaõ no producto da agua, que daõ quaiſquer vaſos conſtantemente cheios por quaiſquer orificios pequenos.*

Seja o orificio circular e horizontal $ABDE$ (Fig. 87.); e eſte ſupponha-ſe dividido em huma infinidade de circumferencias concentricas $abde$, $mnop$ &c. He evidente, que pela adherencia que tem as particulas humas com as outras, a fricçaõ em $ABDE$ ſe deve fazer ſentir em todas as particulas que ſahem ao meſmo tempo. Aſſim, conſtruindo ſobre AC como eixo huma curva $NgqK$, cujas ordenadas AN, ag, mq, CK repreſentem as velocidades em A, a, m, C, a area della repreſentará a ſoma das velocidades, e ſerá proporcional ao producto effectivo do orificio.

Fazendo pois $CA = r$, $Cm = x$, a altura devida á velocidade $mq = X$, a quantidade de licor que no tempo t dá o orificio $= Q$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, a raſaõ da circumferencia ao diametro $= c$; teremos evidentemente (n. 233.) a equaçaõ $Q = 2t\sqrt{a}.\int 2cx\,dx\sqrt{X}$, integral que deve tomar-ſe entre os limites $x = 0$, $x = r$.

273 Supponhamos, por exemplo, que NgqK he huma linha recta (o que naõ póde eſtar longe da verdade, ſendo o orificio muito pequeno); e ſeja H a altura devida á velocidade central CK, e b devida á lateral AN. Conduzindo NR parallela a AC, os dous trianguloſ ſemelhantes NRK, e Nfq daraõ $fq = \frac{Nf.RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r}$, e $mq = \sqrt{X} = \sqrt{b} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r} = \frac{x\sqrt{b}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Logo $\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2\,dx\sqrt{b}+(rx\,dx-x^2\,dx)\sqrt{H}}{r}\right) = \frac{x^3(\sqrt{b}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$; e fazendo $x = r$, teremos finalmente

$$Q = \frac{2tcr^2(\sqrt{aH}+2\sqrt{ab})}{3}.$$

274 Para determinar H e b, ſupponhamos outro orifício circular e horizontal ſituado em igual profundidade; e deſignando as quantidades analogas a H, Q, r pelas meſmas letras accentuadas, teremos pela meſma raſaõ $Q' = \frac{2 t c r'^2 (\sqrt{a} H' + 2\sqrt{ab})}{3}$; e porque a lei da fricçaõ deve ſer a meſma em ambos os caſos, podemos ſuppor que HA he o raio do ſegundo orificio, e aſſim teremos $\sqrt{H} - \sqrt{b} : \sqrt{H'} - \sqrt{b} :: r : r'$, ou $r(\sqrt{H'} - \sqrt{b}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{b})$. Em fim tirando das tres equações precedentes os valores de H, H', b, acharemos

$$H = \left(\frac{Q r'^2 (3r - r') - 2 Q' r^3}{2 c t \sqrt{a} . (r - r') r^2 r'^2} \right)^2$$

$$H' = \left(\frac{Q' r^2 (r - 3 r') + 2 Q r^3}{2 c t \sqrt{a} . (r - r') r^2 r'^2} \right)^2$$

$$b = \left(\frac{Q' r^3 - Q r'^3}{2 c t \sqrt{a} . (r - r') r^2 r'^2} \right)^2$$

275 A meſma theorica ſe applica aos orificios, que naõ forem circulares. Supponhamos, que hum vaſo conſtantemente cheio ſe faz deſaguar pelo orificio rectangular $ABCD$ (Fig. 88.). Tirando as diagonais AC, DB, do ponto O conduza-ſe OK perpendicular a AB, e as rectas quaiſquer OP, Op infinitamente vezinhas. Do meſmo ponto O com o intervallo OP deſcreva-ſe o pequeno arco PV, e com quaiſquer intervallos Om e On infinitamente pouco differentes os pequenos arcos mq, nr. Iſto poſto, ſeja $OK = b, KB = c, KP = x, Om = y$; e aſſim nos triangulos ſemelhantes OKP, PVp teremos $PV = \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb + xx)}}$; e os arcos ſemelhantes PV, mq daraõ $mq = \frac{b\,y\,dx}{bb + xx}$, e conſeguintemente o eſpaço $mqrn = \frac{b\,y\,dy\,dx}{bb + xx}$.

Suppondo pois a meſma lei de fricçaõ (n. 273.), e deſignando por H a altura devida á velocidade em O, e por b a altura devida á velocidade em K, ſerá a quantidade

dade de agua que ſahe pelo orificio $mqrn$ repreſentada por $2tV a \cdot \frac{by\,dy\,dx}{bb+xx}\left(\frac{(V(bb+xx)-y)VH+yVb}{V(bb+xx)}\right)$, cujo integral (conſiderando ſomente y como variavel) ſerá $\frac{tVa.bdx}{(bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(3yyV(bb+xx).VH-2y^3(VH-Vb)}{3}$; e fazendo $y = V(bb+xx)$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo orificio $POp = \frac{tVa.bdx(VH+2Vb)}{3}$.

Integrando eſta expreſſaõ, e depois tomando o ſeu valor quando $x = c$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo triangulo $OKB = \frac{tVa.bc(VH+2Vb)}{3}$. Logo deſignando por Q a quantidade total de fluido que ſahe pelo orificio inteiro $ABCD$, teremos

$$Q = \frac{8tVa.bc(VH+2Vb)}{3}.$$

As quantidades H, b ſe determinaráõ por hum meio analogo ao que acima praticamos (n. 274.); e comparando os reſultados que ſe acharem para differentes alturas do licor, conheceremos a lei com que a fricçaõ diminue o producto dos orificios. Quando eſtes forem verticais, ſe todos os ſeus pontos ſe puderem julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido, uſaremos da meſma ſoluçaõ; e ſe naõ puderem, facilmente a applicaremos, ſuppondo os ditos orificios divididos em huma infinidade de elementos horizontais. O meio, que propomos de determinar as quantidades H, b, carece de grande ſagacidade na pratica; porque as quantidades Q, Q', ſaõ tambem alteradas pela contracçaõ da veia. Para melhor averiguar o effeito da fricçaõ, ſerá conveniente uſar de hum tubo addicional izento de contracçaõ, qual abaixo ſe moſtrará. Naõ indagamos aqui a fricçaõ, que padece hum licor, deſaguando por tubos muito compridos; porque eſte objecto ſerá tratado adiante por meio da experiencia.

Inda-

Indagações Experimentais ſobre as materias precedentes.

276 PAra confrontarmos a theorica com as experiencias, começaremos pelo exame da direcçaõ das particulas no interior dos vaſos, e da contracçaõ da veia ao ſahir dos orificios. Eſtes dous objectos ſaõ entre ſi connexos eſſencialmente; porque a forma da veia depende, como ja diſſemos, da direcçaõ que tem as particulas ao ſahir dos orificios.

Para ver o que paſſa no interior de huma maſſa fluida em movimento, mandei fazer hum vaſo cylindrico de vidro (Fig. 89. 90.) de 17 pollegadas de altura, e 5 e meia de diametro, com duas aberturas *M*, *N* no fundo, e em hum dos lados, nas quais ſe pudeſſem applicar exactamente duas chapas de cobre de meia linha de eſpeſſura, e cada huma dellas furada bem perpendicularmente com orificios de differentes diametros.

277 Conſervando pois o vaſo conſtantemente cheio, e deixando correr a agua por differentes orificios tanto horizontais, como verticais; obſervei, que os corpuſculos eſtranhos miſturados com a agua, como de limadura, de ardoſia pilada &c, ſe dirigiaõ ſempre para o orificio; que no principio deſciaõ ſenſivelmente por direcções verticais; mas que em chegando a *H O* em diſtancia de 3 ou 4 pollegadas do plano horizontal que paſſa pelo orificio, ſe aparravaõ rapidamente da direcçaõ vertical, e ſe encaminhavaõ de todas as partes a buſcar o orificio, como ſe repreſenta nas figuras 89 e 90.

278 Para obſervar a contracçaõ da veia fluida, ſervime de hum vaſo parallelepipedo rectangular de 12 pés de altura, cuja baſe era hum quadrado de 3 pés por cada lado, com ſuas aberturas no fundo e em hum dos lados, nas quais ajuſtavaõ duas chapas de cobre de meia linha de groſſura, e neſtas eſtavaõ praticados differentes orificios. O vaſo ſe entretinha ſempre cheio até huma altura dada, procurando com toda a cautela que a agua proviſional naõ cauſaſſe abalo na outra.

279 Aſſim obſervámos 1º, que a contracçaõ tanto nos orificios horizontais, como nos laterais, ſe faz do meſmo modo ſendo todos elles pequenos. 2º, que nos orificios

circu-

circulares a veia ſe contrahe até huma diſtancia ſenſivelmente igual ao ſemidiametro do orificio. 3°, que a area da ſecçaõ da veia contrahida he para a do orificio como 2 para 3 ſenſivelmente. Eſta ultima determinaçaõ he muito difficil de ſe fazer com exactidaõ, porque huma decima parte de huma linha de erro em diametros taõ pequenos daria huma raſaõ ſenſivelmente differente entre as duas areas. Mais abaixo veremos, como pelo deſaguamento dos orificios ſe póde conhecer melhor a quantidade da contracçaõ.

280 He evidente, que em virtude da contracçaõ devem os orificios dar menos agua em hum tempo determinado, do que dariaõ ſe todas as particulas ſahiſſem perpendicularmente aos planos dos meſmos orificios; porque o movimento obliquo das particulas laterais ſe reſolve em dous, hum parallelo ao plano do orificio, que contrahe a veia, e o outro perpendicular ao meſmo plano, o qual he o unico que produz o deſaguamento.

281 E porque no lugar da maior contracçaõ, a veia fluida toma e conſerva por hum pequeno eſpaço a fórma priſmatica, ſe neſte lugar ſe conheceſſe bem a velocidade do fluido, e a area da ſecçaõ da veia contrahida; eſtá claro, que conſiderando a dita ſecçaõ como o verdadeiro orificio, ſe acharia exactamente a quantidade de fluido, que ſahe em qualquer tempo dado.

Por falta de attender ao effeito deſta contracçaõ, determinou M. Newton na primeira ediçaõ dos ſeus Principios de hum modo erroneo a altura devida á velocidade de hum fluido ao ſahir de hum orificio. Porque governando-ſe pelas quantidades de agua, que ſahiaõ por differentes orificios, fez a dita altura igual ſómente á ametade da altura do fluido, quando pela verdadeira theorica, e pela experiencia das fontes de repuxo, como elle meſmo conheceu depois attendendo á contracçaõ, a devia pôr igual á altura do meſmo fluido.

282 Alguns autores tem julgado, que a contracçaõ he hum effeito puramente accidental, e que ſe póde evitar fazendo ſahir a agua por canudos applicados aos orificios. He verdade, que a agua ſahe entaõ em fórma cylindrica; mas a contracçaõ ſubſiſte ſempre ao entrar do fluido nos ditos canudos, e abaixo veremos pela experiencia que elles ſempre diminuem muito ſenſivelmente as quantida-

des de agua, que naturalmente deveriaõ ſahir, ſe naõ houveſſe contracçaõ.

283 Examinando primeiro as quantidades de fluido, que ſahem por differentes orificios horizontais praticados em chapas de cobre de meia linha de groſſura, por meio de experiencias repetidas com todo o cuidado e attençaõ que nos era poſſivel, eſtando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima dos ditos orificios, achamos

I. Que hum orificio circular de 6 linhas de diametro dava por minuto a quantidade de 2311 pollegadas cubicas de agua.

II. Que por hum orificio circular de huma pollegada de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 9281 pollegadas cubicas de agua.

III. Que por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſaguavaõ no meſmo tempo 37203 pollegadas cubicas.

IV. Que hum orificio rectangular, que tinha hum lado de huma pollegada, e o outro de 3 linhas, dava em hum minuto 2933 pollegadas cubicas de agua.

V. Que por hum orificio quadrado de huma pollegada por cada lado, ſahiaõ no meſmo tempo 11817 pollegadas cubicas.

VI. Que por outro orificio quadrado de duas pollegadas por cada lado deſaguavaõ no meſmo tempo 47361 pollegadas cubicas.

284 Paſſando a examinar os orificios verticais, e conſervando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 9 pés acima do centro dos meſmos orificios em cada huma das experiencias, achamos

VII. Que por hum orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ em hum minuto 2018 pollegadas cubicas de agua.

VIII. Que por outro orificio circular de huma pollegada de diametro deſaguavaõ no meſmo tempo 8135 pollegadas cubicas.

285 Conſervando porém o vaſo conſtantemente cheio na altura de quatro pés acima do centro dos meſmos orificios, achamos

IX. Que pelo orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ 1353 pollegadas cubicas por minuto.

X. E que pelo outro orificio circular de huma pollegada de diametro ſahiaõ 5436 pollegadas cubicas de agua no meſmo tempo

286 Em fim conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 7 linhas acima do centro de hum orificio vertical circular de huma pollegada de diametro, achamos

XI. Que o orificio dava no tempo de hum minuto a quantidade de 628 pollegadas cubicas de agua.

287 Por eſtas experiencias ſe vê 1°, que as *quantidades de licor, que em tempos iguais ſabem por orificios differentes, debaixo de iguais alturas do fluido, ſaõ entre ſi proximamente como as areas dos meſmos orificios*; e ſeriaõ exactamente proporcionais aos orificios, ſe a fricçaõ naõ foſſe menor á proporçaõ nos orificios grandes do que nos pequenos.

2°, Que *as quantidades de licor produzidas por orificios iguais em tempos iguais, debaixo de alturas differentes, ſaõ proximamente como as raizes quadradas das meſmas alturas.*

3°. E em geral, que *as quantidades que ſabem no meſmo tempo por orificios differentes, e debaixo de alturas differentes, ſaõ proximamente na raſaõ compoſta da raſaõ dos orificios e da ſubduplicada das alturas*; e niſto concorda muito bem a experiencia com a theorica (n. 233.).

288 Mas daqui naõ ſe ſegue, que os valores abſolutos das ditas quantidades effectivas ſejaõ proximamente iguais aos que dá a theorica Calculando por exemplo a experiencia VII pela formula $Q = 2\,t\,K\sqrt{a\,b}$ (n. 233.), temos $t = 60''$, $K = \frac{22}{7.16}$, $a = 180$, $b = 108$, e conſeguintemente $Q = 3286$ pollegadas cubicas; valor, que differe muito de 2018 que ſe achou pela experiencia. Porém eſtes dous reſultados eſtaõ ſenſivelmente na raſaõ de 13 para 8, ou proximamente de 8 para 5, e o meſmo ſe acha pelas outras experiencias, tanto nos orificios horizontais, como nos verticais, que tem todos os ſeus pontos ſenſivelmente equidiſtantes da ſuperficie do fluido. Logo para uſar da formula referida de hum modo ſufficientemente exacto na pratica, naõ he neceſſario mais do que diminuir a verdadeira area do orificio na raſaõ de 8 para 5, ou tomar $Q = \frac{5}{4}\,t\,K\sqrt{a\,b}$.

289 Pelo que reſpeita aos orificios verticais, cujos pontos naõ podem ſuppor-ſe equidiſtantes da ſuperficie do fluido, ſuppuzemos que as velocidades eraõ em cada ponto devidas ás alturas do fluido acima delle. Agora calculando a experiencia XI pela formula que achamos (n. 251.), deveriaõ ſahir em hum minuto 966 pollegadas cubicas, quando effectivamente ſaõ 628. Porém calculando o producto do meſmo orificio ſuppoſto horizontal, e na diſtancia media da ſuperficie do fluido que determinámos (n.252.), e applicando-lhe a correcçaõ do nº. precedente, acharemos proximamente 628 pollegadas cubicas. Donde ſe ſegue, que a theorica dos orificios laterais correſponde ás experiencias taõ bem como a dos horizontais.

290 A grande diminuiçaõ, que ſe acha nos reſultados effectivos a reſpeito dos theoricos procede da fricçaõ, que padece o fluido no perimetro do orificio, e da contracçaõ da veia. Os effeitos deſtas duas cauſas vem a ſer miſturados de maneira, que he muito difficil aſſinar a cada hum a ſua parte; mas a fricçaõ nos orificios abertos em paredes delgadas, e ainda em tubos de pouco comprimento he pouco conſideravel em comparaçaõ do effeito, que procede da contracçaõ. Iſto ſe moſtra pela meſma experiencia; porque ſahindo a agua por hum tubo applicado ao orificio, e ſeguindo as paredes delle, no que certamente experimenta maior fricçaõ, o producto ſe chega mais para o reſultado theorico, por naõ ſer neſſe caſo taõ grande o effeito da contracçaõ.

291 Mas para darmos tambem hum extracto das noſſas experiencias ſobre o fluxo da agua por tubos addicionais, primeiramente applicámos ao fundo do vaſo hum tubo cylindrico vertical de huma pollegada de diametro interior; e conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima da baſe ſuperior do tubo, achamos

I. Que tendo o tubo quatro pollegadas de comprido dava em hum minuto 12274 pollegadas cubicas de agua.

II. Que tendo duas pollegadas de comprido dava no meſmo tempo 12188 pollegadas cubicas

III. E que tendo huma pollegada e ſeis linhas dava 12168 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

292 Applicando ao fundo de hum vaſo dous tubos cylindri-

cylindricos de duas pollegadas de comprido cada hum, cujos diametros interiores eraõ de 6 e 10 linhas, e conſervando a agua na altura conſtante de 2 pés acima do orificio exterior da ſahida, achamos

IV. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro ſahiaõ em hum minuto 1222 pollegadas cubicas de agua.

V. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 3402 pollegadas cubicas.

293 E conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 3 pés e 10 pollegadas acima dos orificios exteriores dos meſmos tubos, achamos

VI. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro deſaguavaõ em hum minuto 1689 pollegadas cubicas.

VII. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 4703 pollegadas cubicas.

294 Pelas tres primeiras experiencias ſe vê, que ſahindo a agua encanada por hum tubo vertical, a quantidade que corre no meſmo tempo he tanto maior, quanto mais comprido he o tubo; e que eſtas quantidades ſeguem proximamente a raſaõ das raizes quadradas das alturas do fluido acima da baſe inferior do tubo, que he o orificio da ſahida. E reflectindo nas outras experiencias, ſe verá igualmente, que *as quantidades de fluido que ſahem no meſmo tempo por differentes tubos addicionais, debaixo de alturas differentes, ſaõ na raſaõ duplicada dos diametros dos orificios e ſubduplicada das alturas*; que he a meſma proporçaõ, que achamos para os orificios abertos em paredes delgadas.

295 Calculando pela theorica a experiencia VI, acharemos que hum orificio de 6 linhas de diametro na profundidade de 3 pés, e 10 pollegadas devia dar em hum minuto 2145 pollegadas cubicas de agua (n. 233.), quando pela experiencia ſe acháraõ 1689 pollegadas cubicas. Eſtes dous reſultados eſtaõ proximamente na raſaõ de 16 para 13, e o meſmo ſe acha ſenſivelmente pelas outras experiencias. Logo para calcular o deſaguamento por tubos addicionais pela formula $Q = 2tK\sqrt{ab}$, cóm exactidaõ ſufficiente na pratica, ſerá neceſſario diminuir o orificio K na raſaõ de 16 para 13, ou de outra ſorte tomar

$$Q = \frac{13}{8} tK\sqrt{ab}.$$

Da-

Daqui ſe moſtra, que ſuppondo iguaes as alturas do fluido, e as areas dos orificios, ſerá a quantidade theorica, a que dá hum tubo addicional, e a que dá o orificio aberto em huma parede delgada no meſmo tempo, como os numeros 16, 13, 10 proximamente.

296 A meſma propriedade de aumentar o producto dos orificios ſe acha tambem, e mais ventajoſamente, nos tubos conicos, ou ſe façaõ deſaguar pela baſe maior, ou pela menor. Mas he neceſſario que tenhaõ certo comprimento, e que as baſes eſtejaõ entre ſi em certa raſaõ. Porque ſendo o tubo curto, e as baſes muito deſiguais, ſe deſaguar pela menor, a grande convergencia das particulas laterais produzirá huma contracçaõ exterior; e ſe deſaguar pela baſe maior, formar-ſe-ha contracçaõ no interior do tubo, e a agua naõ ſeguirá a direcçaõ das paredes delle.

297 De todos os tubos addicionais, que ſe podem applicar com o fim de procurar o maior deſaguamento poſſivel em hum tempo dado, o mais ventajoſo he o que tem a forma, que a veia fluida toma naturalmente ao ſahir de hum orificio aberto em huma parede delgada. Seja *M S O N* (Fig. 91.) a figura da veia deſde o orificio *M N* até o limite da contracçaõ *S O*; e imagine-ſe que *M S*, *N O* ſe tornaõ em paredes de hum tubo *M N S O*, as quais naõ façaõ mais que tocar a ſuperficie da agua, ſem conſtranger de modo algum o ſeu movimento. Entaõ, ſendo *S O* o verdadeiro orificio, por onde ſe faz o deſaguamento, e ſendo a velocidade das particulas ao ſahir delle devida á altura *r b*; eſtá claro que, naõ tendo neſte caſo lugar a contracçaõ, o deſaguamento pelo orificio *S O* terá toda a plenitude poſſivel, e ſerá igual ao que reſulta da theorica.

Eſta reflexaõ pode ter uſo na pratica, e para iſſo deve ter-ſe preſente que a area *M N* he para a area *S O* como 8 para 5 proximamente, e que a diſtancia *r p* entre eſtas duas areas he ſenſivelmente igual ao ſemidiametro *p M* ou *p N*. Os lados *M S*, *N O* ſaõ ſenſivelmente rectilineos.

298 Mas tornando aos tubos cylindricos, vejamos a raſaõ porque elles daõ mais agua que os orificios abertos em paredes delgadas. Seja *M O P N* hum tubo cylindrico horizontal applicado ao vaſo *A C* (Fig. 92.); e imagine-

imaginemos, que eſtando primeiro tapado em *M N* com huma tampa, eſta ſe aniquila ſubitamente, e deixa correr o fluido. Entrando a veia por *M N* tende a contrahir-ſe, e as particulas *M*, *N* deſcreveriaõ ſem ceſſar as parabolas *M m x*, *N n y*, ſe para iſſo tiveſſem liberdade. Logo ſe o ponto *P*, extremidade do tubo, cahir entre os pontos *N* e *y*, a contracçaõ ſe formará, e o tubo deſaguará como ſe o orificio foſſe aberto em huma parede delgada. Mas ſe o ponto *P* eſtiver adiante de *x*, como ſe repreſenta na figura, a percuſſaõ da agua ſobre *y x* deverá fazella encher o eſpaço *M n x N*; e o meſmo ſuccederá, ainda que com mais difficuldade, quando o ponto *P* cahir entre *y* e *x*. Em ambos os caſos a agua ſe determina a ſeguir as paredes do tubo, e a encher na ſahida o orificio inteiro *O P*. Huma vez, que o licor toma a direcçaõ das paredes do tubo, eſtá claro que os movimentos naturais das particulas *M*, *N* ſaõ alterados, e ſe fazem menos obliquos ao plano da abertura *M N*. Logo em virtude deſta diminuiçaõ de obliquidade, paſſará em hum tempo dado mais á agua por *M N* do que havia de paſſar, ſe ella naõ foſſe encanada pelo tubo. A meſma explicaçaõ ſe applica aos tubos conicos.

299 Naõ podem com tudo os tubos addicionais, exceptuando o que deſcrevemos no nº. 297, dar productos iguais aos theoricos, porque a força que expelle a agua em *M N* perde huma parte da ſua acçaõ em forçar a agua encanada pelo tubo a encher a capacidade delle. Aſſim ſahe mais agua por hum tubo addicional, porque ſahe por elle cheio, ſem padecer contracçaõ exterior; mas naõ ſahe cõm tanta velocidade, como por hum orificio aberto em huma parede delgada. E daqui vem, que os repuxos que ſahem por tubos addicionais naõ ſobem a taõ grande altura, como os que ſahem por orificios abertos em paredes delgadas.

300 Eisaqui huma Taboa de comparaçaõ entre o deſaguamento natural de hum orificio circular de huma pollegada de diametro em hum minuto, e o deſaguamento effectivo do meſmo orificio ſendo aberto em huma parede delgada, ou eſtando na extremidade de hum tubo cylindrico de duas pollegadas de comprido, para differentes alturas de agua acima do centro do meſmo orificio.

Altu-

Alturas conſtantes da agua	Producto natural em hum minuto	Producto effectivo pelo orificio aberto em huma parede delgada	Producto effectivo pelo tubo additional
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
1	4381	2722	3539
2	6196	3846	5002
3	7589	4710	6126
4	8763	5436	7070
5	9797	6075	7900
6	10732	6654	8654
7	11592	7183	9340
8	12392	7672	9975
9	13144	8135	10579
10	13855	8574	11151
11	14530	8990	11693
12	15180	9384	12205
13	15797	9764	12699
14	16393	10130	13177
15	16968	10472	13620

301 Por meio das experiencias deſta Taboa, ſem tomar nada da Theorica, ſe podem reſolver as queſtoens principaes do deſaguamento dos orificios, como moſtraremos nos exemplos ſeguintes, nos quaes ſuppomos que os orificios ſaõ abertos em paredes delgadas, e analogamente ſe praticará com os tubos addicionais.

302 QUESTAÕ I. *Sendo hum vaſo conſtantemente cheio na altura de* 11 *pés e* 6 *pollegadas acima do centro de hum orificio de* 16 *linhas de diametro; pergunta-ſe a quantidade de agua que dará em* 8 *minutos?*

Por quanto o orificio de 12 linhas debaixo da altura de 11 pés dá em hum minuto 8990 pollegadas cubicas de agua (n. 300.); eſtá claro, que fazendo eſta proporçaõ

144

$144 \times \sqrt{11} :: 256 \times \sqrt{11,5} :: 8990$? o quarto termo 16341 será o producto do orificio proposto em hum minuto (n. 287.); e multiplicando-o por 8, acharemos que em 8 minutos dará 130728 pollegadas cubicas de agua.

303 Questaõ II. *Suppondo que hum vaso está constantemente cheio na altura de 11 pés e 6 pollegadas acima de hum orificio, que dá 245544 pollegadas cubicas de agua em 6 minutos; pergunta-se o diametro do orificio?*

O orificio proposto dará em hum minuto 40924 pollegadas cubicas. Assim designando por D o seu diametro, teremos $144 \times \sqrt{11} : D^2 \sqrt{11,5} :: 8990 : 40924$; e consequintemente $D^2 = 144 \times \frac{40924}{8990} \times \sqrt{\frac{110}{115}} = 641,1$ linhas quadradas. Logo $D = 25,32$ linhas $= 2$ poll. 1 linh. e $\frac{1}{3}$.

304 Questaõ III. *Hum vaso constantemente cheio na altura de 16 pés tem desaguado 45678 pollegadas cubicas por hum orificio de 16 linhas de diametro; pergunta-se o tempo?*

Buscando pela questaõ primeira o producto do orificio proposto em hum minuto, acharemos 19276 pollegadas cubicas. Depois fazendo $19276 : 45678 ::$ 1 minuto? o quarto termo será o tempo procurado, que se achará $= 2'22'',2$.

305 Questaõ IV. *Suppondo que hum vaso dá 40000 pollegadas cubicas de agua em 4 minutos por hum orificio de 10 linhas de diametro; pergunta-se a altura da agua acima do orificio?*

Por quanto o orificio proposto dá 10000 pollegadas cubicas por minuto, designando por H a altura procurada, pela mesma regra da proporçaõ (n.287.), teremos $144 \times \sqrt{11} : 100 \times \sqrt{H} :: 8990 : 10000$. Logo $H = 11 \times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pés.

306 Antes de acabarmos este Capitulo, será conveniente que expliquemos o modo, que se deve ter na distribuiçaõ das aguas; objecto, que tem applicaçoens muito frequentes, e importantes na pratica.

Seja *MNOP* (Fig. 93.) a elevaçaõ de huma mãi d'agua, na qual entra constantemente huma quantidade dada de agua Q em cada minuto, deve abrir-se na parede *MNOP* hum

hum numero dado de orificios, de maneira que os productos particulares delles eſtejaõ na raſaõ de quaiſquer numeros m, n, p &c, e o producto total ſeja igual á agua que entra na mái. Partiremos pois primeiramente a quantidade Q em partes proporcionais a m, n, p &c, que ſeraõ $\frac{mQ}{m+n+p\ \&c.}, \frac{nQ}{m+n+p\ \&c.}, \frac{pQ}{m+n+p\ \&c.}$ &c. Depois acharemos a grandeza que ſe deve dar a cada orificio, para deſaguar por elle a ſua quantidade reſpectiva, conforme a profundidade em que ſe houver de abrir, pela Queſtaõ II (n. 303.).

Exemplo. Supponhamos que o producto total Q he de 3600 pollegadas cubicas por minuto, e que eſta ſe deve diſtribuir por tres orificios circulares A, B, C, de maneira que os productos reſpectivos delles ſejaõ como 6, 3, 1. Neſte caſo teremos o producto de $A = 2160$, de $B = 1080$, de $C = 360$ pollegadas cubicas por minuto; e ſuppondo, que os orificios ſe haõ de abrir em huma parede delgada, e que haõ de ter os centros na meſma horizontal DE diſtante da ſuperficie da agua a quantidade $CH = 6$ pollegadas, deſiguando os diametros reſpectivos por D, d, δ, e ſervindo-nos da experiencia primeira da Taboa (n. 300.), teremos eſtas proporçoens (n. 287.)

$$2722 : 2160 :: 1 \times 144 : DD\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$2722 : 1080 :: 1 \times 144 : dd\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$2722 : 360 :: 1 \times 144 : \delta\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

das quais ſe tira $D = 12,71$, $d = 9$, $\delta = 5,9$ linhas.

Com igual facilidade ſe determinariaõ os diametros, ſe os centros naõ eſtiveſſem na meſma horizontal. Todas as ſituaçoens ſaõ igualmente admiſſiveis, quando o livel da agua permanece na meſma altura; mas como iſto naõ ſuccede aſſim, ſempre haverá tempo em que os orificios diſtribuaõ a agua fóra da raſaõ conveniente, ſe forem muito deſiguais, ou ſe naõ eſtiverem na meſma horizontal. O melhor partido, he diſpollos na meſma horizontal, e quando algum deveſſe ſer muito deſigual dos outros partillo em partes pouco deſiguais, cujos productos ſe venhaõ depois a reunir no cano do ſeu deſtino. 307

307 M. Mariotte deu o nome de *pollegada d'agua* ao producto de hum orificio circular vertical de huma pollegada de diametro, que tem o centro diſtante 7 linhas da ſuperficie da agua; producto, que em hum minuto achou ſer de 672 pollegadas cubicas de agua, e que pelas noſſas experiencias he de 628. Mas muitos praticos ignorantes tem abuſado deſta expreſſaõ, entendendo por *pollegada d'agua* o producto que dá por minuto hum orificio de huma pollegada de diametro, ſem attenderem á altura do livel acima do orificio, que he hum elemento eſſencial.

Em Portugal daõ o nome de *manilha d'agua* á que ſahe por hum orificio, que tem hum palmo craveiro por circumferencia, ou 2,546 pollegadas de diametro. Dividem a manilha em 16 *aneis*, e cada anel em 8 *penas*; e conſeguintemente ſerá o diametro do anel de 0,636, e o da pena de 0,225 pollegadas. Eſta diviſaõ, naõ ſe attendendo á altura do livel da agua acima do orificio, incorre no meſmo abſurdo dos praticos Francezes; porque o meſmo orificio em differentes alturas dá no meſmo tempo diverſas quantidades de agua, e o valor deſta naõ ſe póde julgar ſenaõ pelas quantidades que os orificios daõ no meſmo tempo.

CAPITULO II.

Do movimento das aguas, que ſahem pelos orificios de quaiſquer vaſos, até elles ſe eſgotarem.

308 NOs vaſos conſtantemente cheios naõ depende a quantidade de agua que ſahe por hum orificio, ſenaõ da area do orificio, da altura do fluido, e do tempo. Mas quando naõ recebem agua nenhuma proviſional, e conſeguintemente deſaguaõ pelos orificios até ſe deſpejarem, he neceſſario além diſſo attender á figura dos meſmos vaſos, a qual influe eſſencialmente nas circunſtancias do deſaguamento.

309 Para determinarmos em geral o methodo de reſolver eſta nova queſtaõ, reflectiremos que em hum inſtante dt póde a altura do fluido acima do orificio ſuppor-ſe

por-ſe conſtante, e que póde conſeguintemente calcular-ſe a pequena quantidade que ſahe pelo orificio pelo methodo do Capitulo precedente. Aſſim, ſuppondo a altura primitiva do fluido $Kp = b$ (Fig. 94.), o eſpaço KL que a ſuperficie delle tem deſcido no tempo $t = x$, a area da ſecçaõ $EFGH = X$, funçaõ de x dada pela figura do vaſo, a area do orificio $= K$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, acharemos que ſendo o orificio infinitamente pequeno dará no inſtante dt a quantidade elementar $dQ = 2K\,dt\sqrt{[a(b-x)]}$. Porém eſta he igual á camada elementar $EFGHbefg = X\,dx$. Logo $X\,dx = 2K\,dt\sqrt{[a(b-x)]}$, e $t = \int \frac{X\,dt}{2K\sqrt{[a(b-x)]}}$.

310 Sendo pois dada a figura do vaſo, e a altura KR que tem deſcido a ſuperficie do fluido, determinaremos o tempo. E como igualmente podemos com os meſmos dados determinar o ſolido $ABCDZOQP$, que he o fluido deſaguado no dito tempo, acharemos o producto do orificio em hum tempo determinavel pela figura do vaſo, e pela altura que tem deſcido a ſuperficie do fluido.

Reciprocamente: Se for dado o tempo por huma funçaõ das alturas verticais, que deſce a ſuperficie do fluido, poderemos determinar a figura do vaſo. Porque neſſe caſo teremos $dt = X'dx$, ſendo X' huma funçaõ de x; e por conſeguinte $X = 2KX'\sqrt{[a(b-x)]}$.

311 Exemplo I. *Suppondo que o vaſo ApqC* (Fig. 94.) *he produzido pela revoluçaõ de huma parabola, cujas ordenadas AK, EL ſejaõ na raſaõ ſubquadruplicada das abſciſſas pK, pL &c; determinar o tempo do deſaguamento correſpondente a qualquer altura KR.*

Seja a equaçaõ da parabola genitora $y^4 = p^3(b-x)$; ſendo $EL = y$, $pK = b$, $LK = x$, e o parametro $= p$. Repreſentando a raſaõ da circumferencia ao diametro por c, teremos pois $X = cy^2 = cp^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b-x)}$. Logo $t = \int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx\sqrt{(b-x)}}{2K\sqrt{[a(b-x)]}} = \int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx}{2K\sqrt{a}} = \frac{cp^{\frac{3}{2}}x}{2K\sqrt{a}}$.

Donde ſe vê, que os tempos ſaõ proporcionais aos eſpaços verticais, que anda a ſuperficie do fluido. Conſeguintemen-

temente he eſte o vaſo mais accommodado para ſe formar huma *clepſydra*, ou ampulheta de agua; porque dividindo a altura primitiva pK em partes iguais, eſtas ſeraõ andadas pela dita ſuperficie em tempos iguais.

Fazendo $x = b$, teremos o tempo que o vaſo carece para ſe eſgotar $= \frac{cp^{\frac{3}{2}}b}{2K\sqrt{a}}$; e querendo, que eſte ſeja igual a hum tempo dado, das tres quantidades p, b, K podem tomar-ſe duas arbitrariamente, e a terceira ſe determinará ſem difficuldade.

Subſtituindo o valor de $dt = \frac{cp^{\frac{3}{2}}dx}{2K\sqrt{a}}$ na equaçaõ $dQ = 2Kdt\sqrt{[a(b-x)]}$, teremos $Q = \int cp^{\frac{3}{2}}dx\sqrt{(b-x)} = -\frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}\left(b^{\frac{3}{2}} - (b-x)^{\frac{3}{2}}\right)$, porque deve ſer $Q = 0$ quando $x = 0$; e pondo em lugar de x o ſeu valor $\frac{2Kt\sqrt{a}}{cp\sqrt{p}}$, teremos

$$Q = \frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}\left[b^{\frac{3}{2}} - \left(b - \frac{2Kt}{cp}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

312 Reciprocamente: Se quizeſſemos achar a figura de hum vaſo, em que a agua deſceſſe proporcionalmente ao tempo, teriamos $t = \frac{x}{q}$, e $dt = \frac{dx}{q}$. Subſtituindo eſte valor de dt na equaçaõ $Xdx = 2Kdt\sqrt{[a(b-x)]}$, reſultaria $X = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{q}$. Porém, havendo a figura de ſer hum ſolido de revoluçaõ, he $X = cy^2$; logo $y^2 = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{cq}$, equaçaõ á meſma para-

bola;

bola, que pelo methodo directo achámos ſer a que tem eſta propriedade.

313 Exemplo II. *Suppondo , que o vaſo A M N C he priſmatico ; determinar o tempo que gaſtará a ſuperficie do fluido em deſcer de* K *até* R (Fig. 95.) .

Neſte caſo a area X he conſtante , e a formula $t = \int \frac{X\,dx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}$ dará $t = \frac{X}{2K\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}} = -\frac{X}{K\sqrt{a}}\sqrt{(b-x)} + C$; e determinando a conſtante pela condiçaõ que $x = o$ dê $t = o$, ſerá $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$. Pondo $x = b$, ſera o tempo que gaſta o vaſo em ſe eſgotar $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde ſe ſegue que *os tempos que gaſtaõ em eſgotar-ſe dous vaſos priſmaticos , ſaõ na raſaõ compoſta da raſaõ das baſes , da ſubduplicada das alturas , e da inverſa dos orificios.*

314 A formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$ dá o meio de conſtruir huma clepſydra cylindrica. Por exemplo : ſe quizermos dividir a altura $C N$ em 12 partes tais, que ſejaõ corridas pela ſuperficie do licor em tempos iguais , dividiremos $C N$ em 144 partes iguais , que he o quadrado de 12 : de 144 tiraremos 121 quadrado de 11 , e o reſto 23 dará na meſma linha $C N$ o intervallo $C G$ da primeira diviſaõ ; de 121 tiraremos 100 quadrado de 10 , e o reſto 21 ſerá o ſegundo intervallo &c. Donde ſe vê que as partes ſucceſſivas de cima para baixo ſeráõ 23 , 21 , 19 , 17 , 15 &c.

E ſe quizermos , que cada intervallo ſeja corrido em hum tempo dado , em huma hora por exemplo , ſerá neceſſario proporcionar de tal modo a baſe do cylindro X, e a altura delle b com a area do orificio K , que tenhamos 1 hora $= \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{\frac{121}{144}b}\right) = \frac{X}{12K}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde ſe vê , que das quantidades X, b, K ſendo tomadas duas

duas a arbitrio, a terceira ſe determinará immediatamente por eſta equaçaõ.

315 Se o vaſo priſmatico $AMNC$ ſe conſervaſſe conſtantemente cheio, lançaria pelo orificio pq huma quantidade dupla de agua em hum tempo igual ao que gaſta em ſe evacuar pelo meſmo orificio. Porque ſendo o dito tempo $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}}$, a quantidade de agua ſeria neſſe caſo $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot 2K\sqrt{ab} = 2Xb$, quantidade dupla do priſma $AMNC$ que ſahe no meſmo tempo, quando o vaſo ſe deſpeja pelo orificio.

316 Exemplo III. *Determinar o tempo do deſaguamento de hum vaſo priſmatico* $AMNC$ (Fig. 96.), *cheio de licores differentes* $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$, *os quais ſuppomos que ſe naõ miſturaõ, ſendo poſtos os mais leves ſobre os mais pezados.*

Sendo p, p', p'' as gravidades eſpecificas dos fluidos ML, FG, EC reſpectivamente, reflectiremos que a preſſaõ produzida no orificio pq pelo fluido FG he igual á que produziria huma columna da meſma eſpecie que ML, cuja altura foſſe $= GL\frac{p'}{p}$ (n. 46.), e que a preſſaõ produzida pelo fluido EC he igual á que produziria huma columna da meſma eſpecie que ML, cuja altura foſſe $= GC\frac{p''}{p}$. Fazendo pois $NL = c$, $LG = f$, $GC = g$, e conſervando todas as outras denominaçoens do Exemplo precedente, naõ teremos mais que ſubſtituir $c + \frac{fp'}{p} + \frac{gp''}{p}$ em lugar de b na equaçaõ $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right]$, que achámos para os vaſos priſmaticos; e reſultará

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(pc+fp'+gp'')} - \sqrt{(pc+fp'+gp''-px)}}{\sqrt{p}}\right].$$

Bem ſe vê, que havendo ſahido inteiramente o fluido ML, teremos a expreſſaõ do tempo

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(fp' + gp'') - \sqrt{(fp' + gp'' - p'\pi)}}}{\sqrt{p'}}\right];$$

que havendo ſahido o ſegundo, ſerá $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{g} - \sqrt{(g - \pi)}\right)$. Do meſmo modo ſe diſcorrerá, quando for maior o numero dos fluidos.

317 Exemplo IV. *Determinar o tempo, que deve gaſtar hum vaſo compoſto de dous vaſos priſmaticos AV, OH em ſe eſgotar por hum oriſicio muito pequeno pq* (Fig. 97.).

Produzindo AS, CV até encontrarem o plano horizontal DH, he manifeſto que a velocidade do fluido em pq he como ſe elle ſahiſſe do vaſo ſimples $AMNC$. Logo, deſignando por A a baſe do vaſo ſuperior, e por B a do inferior, acharemos (n. 213.) que o tempo da deſcida da ſuperficie de AC até SV he repreſentado por $\frac{A}{K\sqrt{a}}(\sqrt{AM} - \sqrt{SM})$, e que o tempo da deſcida de OP até DH he repreſentado por $\frac{B\sqrt{OD}}{K\sqrt{a}}$; e ajuntando eſtes dous tempos ſera o tempo total da evacuaçaõ repreſentado por $\frac{A\sqrt{AM} - (A - B)\sqrt{SM}}{K\sqrt{a}}$.

318 Até agora havemos ſuppoſto que os orificios ſaõ infinitamente pequenos. Se forem de grandeza conſideravel, ſituados porém horizontalmente, podemos ſervirnos do methodo geral do Capitulo I, que ſe applica ſem difficuldade ao caſo preſente.

Suppondo, que a ſuperficie da agua ſe acha no primeiro inſtante em SX (Fig. 73.), e que no tempo t chega á poſiçaõ indeterminada AB; eſtá claro, que conſervando todas as denominações do nº 236, e deſignando ſomente a altura Ep, que neſte caſo he variavel, por z, teremos $Ee = -dz$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ final do nº 237, teremos

$$M^2 z\,dz + K^2 MN\,ds + s\,dz(K^2 - M^2) = 0.$$

Se K for infinitamente pequeno, reſultará deſta equaçaõ $s = z$, iſto he, ſerá a velocidade a cada inſtante devida á altura do fluido, como acima tinhamos ſuppoſto.

319 Como

319 Como M, N ſaõ aqui funções de z dadas pela figura do vaſo, a equaçaõ precedente ſe reduzirá ſempre a eſta fórma

$$ds + A.Zsdz + B.Z'dz = 0,$$

ſendo Z, Z' funções de z, e A, B conſtantes. Aſſim póde integrar-ſe em geral pelo methodo, de que já nos havemos ſervido (n. 105.). Aqui moſtraremos o ſeu uſo em hum caſo particular.

320 Supponhamos, que o vaſo propoſto he hum cylindro vertical. Conforme as noſſas denominações M repreſentará neſte caſo a ſecçaõ horizontal conſtante do cylindro, e teremos $N = \frac{z}{M}$; e à equaçaõ do nº 318, fazendo $\frac{M^2}{K^2} = m$, e $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$, ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$z\,ds - n\,s\,dz + m\,z\,dz = 0.$$

Multiplicando-a por huma funçaõ φ de z, teremos $\varphi z\,ds - \varphi n s dz + \varphi m z dz = 0$; e ſuppondo que $\varphi z s + \int \varphi m z dz = C$, teremos $\varphi z ds + s(\varphi dz + z d\varphi) + \varphi m z dz = 0$. Comparando eſtas duas equações differenciais, reſultará $\varphi dz + z d\varphi = -\varphi n dz$, e conſeguintemente $\frac{d\varphi}{\varphi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$, ou $\varphi = z^{-(n+1)}$; e em fim ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $\varphi z s + \int \varphi m z dz = C$, deſignando a altura primitiva do fluido Op por H, e determinando a conſtante C pela condiçaõ que $z = H$ dê $s = 0$, teremos

$$(1-n)\,s\,z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}.$$

Se o fluido no primeiro inſtante tiveſſe, por qualquer cauſa exterior, huma velocidade devida á altura b, ſeria neceſſario determinar a conſtante pela condiçaõ que $z = H$ deſſe $s = b.\frac{M^2}{K^2}$; e aſſim teriamos ſempre s em funçaõ de z e de conſtantes. Do meſmo modo ſe póde achar a relaçaõ entre o tempo e a velocidade, ou entre o tempo e a altura z.

321 Quando $n = 1$, ou $M^2 = 2K^2$, o integral precedente dá para s hum valor indeterminado. Entaõ he neceſſario recorrer á formula differencial, que dará $2zdz$

$+ z\,ds - s\,dz = 0$, ou $\frac{z\,ds - s\,dz}{zz} = -\frac{2\,dz}{z}$, cujo integral he $\frac{s}{z} = l.H^2 - lz^2$, completando-ſe de maneira que $z = H$ dè $s = 0$. Logo neſte caſo $s = 2z\,(l.H - lz)$, ou $s = 2z.l.\frac{H}{z}$.

322 Sobre o meſmo exemplo faremos huma obſervaçaõ, que com as mudanças competentes ſe applica a toda a ſorte de vaſos. Supponhamos, que a ſuperficie da agua no primeiro inſtante ſe abaixa no cylindro a quantidade infinitamente pequena q. Entaõ teremos $z = H - q$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $(1-n)\,s\,z^{-n} + m\,z^{1-n} = m\,H^{1-n}$, e deſprezando os termos que involvem q^2, q^3 &c, acharemos $s = mq = q.\frac{M^2}{K^2}$. Donde ſe ſegue, que a altura devida á velocidade da ſuperficie no cylindro he repreſentada por q; e por conſeguinte, que a ſuperficie deſce nos primeiros inſtantes á maneira dos graves, ou como ſe o cylindro naõ tiveſſe fundo, e o fluido cahiſſe junto á maneira de huma colunna ſolida.

323 Daqui ſe tem formado huma objecçaõ contra a hypotheſe do paralleliſmo das camadas, em que eſtes calculos ſe fundaõ; porque parece, que ſahindo o fluido por hum orificio, naõ póde a ſuperficie delle deſcer do meſmo modo que deſceria, ſe o fundo lhe naõ puzeſſe obſtaculo. Mas como eſte obſtaculo faz que a preſſaõ do fluido communique maior velocidade á parte que ſahe pelo orificio, do que ella haveria adquirido pela propria gravidade; póde ſer que a ſahida mais promta deſſa porçaõ de licor dè lugar a que a ſuperficie do fluido nos primeiros inſtantes deſça como ſe eſtiveſſe livre. Por outra parte, ainda que eſta hypotheſe repreſentaſſe a fluxaõ de hum modo erroneo para hum tempo infinitamente pequeno, naõ ſe ſegue que naõ ſeja propria para a repreſentar em hum tempo finito de hum modo approximado, debaixo da reſtricçaõ que acima declarámos (n. 235.).

324 Pelo que reſpeita aos orificios laterais, quando ſaõ pequenos, e além diſſo ſituados de maneira que todos

dos os ſeus pontos ſe poſſaõ a cada inſtante julgar equidiſtantes da ſuperficie do fluido, he o calculo abſolutamente o meſmo que nos horizontais. Quando porém naõ podem julgar-ſe todos os pontos equidiſtantes da ſuperficie, ſeguiremos hum methodo analogo ao que praticámos no Capitulo precedente (n. 244.).

Suppondo pois a altura primitiva do fluido $H =$, o eſpaço que no tempo t tem deſcido a ſuperficie delle $= x$, a area actual da meſma ſuperficie $= X$, he manifeſto que a altura do fluido em hum inſtante dt ſe póde tomar como conſtante. Logo deſignando por z a diſtancia da dita ſuperficie aos differentes elementos horizontais do orificio, e conſervando as mais denominações do nº. 244, teremos $dQ = X dx = 2 dt \sqrt{a} . \int dS \sqrt{z}$; e conſeguintemente

$$t = \int \frac{X dx}{2 \sqrt{a} . \int dS \sqrt{z}} .$$

Na expreſſaõ $\int dS \sqrt{z}$ deve tomar-ſe x como conſtante.

325 Por exemplo: Seja hum vaſo priſmatico AG (Fig. 74.), que ſe evacua por hum orificio rectangular MN, e ſupponhamos a altura primitiva do fluido acima da baſe do orificio $= H$, o eſpaço que tem deſcido a ſuperficie $= x$, a dimenſaõ horizontal do rectangulo $= f$, a vertical $= b$. Tomando $KL = u$, teremos $dS = f du$, e $z = H - b - x + u$; e por conſeguinte $\int dS \sqrt{z} = \int f du \sqrt{(H - b - x + u)} = \frac{2}{3} f \left[(H - x)^{\frac{3}{2}} - (H - b - x)^{\frac{3}{2}} \right]$, tomando o integral entre os limites de $u = 0$, e $u = b$. E ſubſtituindo eſte valor na formula geral, teremos

$$t = \int \frac{3 X dx}{4 f \sqrt{a} . \left[(H - x)^{\frac{3}{2}} - (H - b - x)^{\frac{3}{2}} \right]} .$$

Eſta expreſſaõ, ſem embargo de X ſer conſtante neſte caſo, naõ póde integrar-ſe ſenaõ por meio de quadraturas, ou de ſeries, e o meſmo ſuccede nos outros caſos.

326 Mas como por inducçaõ temos viſto no Capitulo I, que os orificios laterais deſaguaõ ſenſivelmente como os horizontais, contando-ſe as alturas do fluido deſde os centros de gravidade dos meſmos orificios, po-

demos cõm eſta unica mudança ſervirãõs na pratica do methodo, que havemos expoſto para os orificios horizontais. Paſſemos á ſoluçaõ de alguns Problemas, que ſerviráõ de exercicio neſta materia.

327 Probl. I. *Suppondo, que o vaſo IT (Fig. 98.) conſtantemente cheio até a altura TL tranſmete a agua para o vaſo priſmatico AN por hum pequeno tubo horizontal TM; pergunta-ſe o tempo, em que a ſuperficie da agua no vaſo AN chegará a huma poſiçaõ dada EG.*

Seja a area do orificio repreſentada por M, e a baſe do vaſo AN por A; e ſuppondo que já tem entrado nelle huma quantidade RN de agua tal, que a pequena quantidade que entra por M lhe naõ cauſe abalo ſenſivel, eſtará o fluido RN em equilibrio com ZT, e a velocidade em N ſerá devida á altura LX, ou RA, igual ao exceſſo da altura do vaſo AM ſobre a altura actual da ſuperficie do fluido RS. Aſſim conſiderando a altura AR como dada, e como a do vaſo priſmatico $ARSC$, he facil de ver que a ſuperficie RS deverá ſubir do meſmo modo, como a de hum fluido $ARSC$ que foſſe ſollicitado de baixo para cima por huma força igual á da gravidade, e que deſaguaſſe por hum orificio igual a M aberto na baſe ſuperior AC. Logo ſerá o tempo empregado em ſubir de RS até EG repreſentado pela equaçaõ (n.313.).

$$t = \frac{A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}.$$

Donde ſe ſegue, que o tempo neceſſario para ſe encher o vaſo RC na hypotheſe do problema he duplo do tempo, em que hum vaſo conſtantemente cheio na altura AR daria pelo orificio M a quantidade de agua $ARSC$ (n. 315.).

328 A altura AR, que ſuppomos conhecida, naõ póde differir muito de AM. Será facil de determinar em cada caſo, havendo reſpeito á amplitude do fundo MN. Quando ſe quizer ſaber o tempo total, que gaſta o vaſo em ſe encher de M até E, buſcar-ſe-ha o tempo que gaſta em ſahir pelo orificio M a quantidade de fluido MS, ſuppondo que a altura do fluido acima do orificio he conſtantemente LT (n. 233.), e o tempo que gaſta a ſuperficie RS em chegar a EG pela equaçaõ pre-

precedente ; e a ſoma deſtes dous tempos dará proximamente o tempo procurado.

329 Probl. II. *Hum vaſo* IT (Fig.99.) *cheio até* IL, *ſem receber nova agua ſe deſpeja por hum pequeno tubo* TM *para hum vaſo lateral* MC, *que no primeiro inſtante contém huma quantidade de agua até* DE, *e deſagua parte della pelo orificio* N. *Suppondo, que em certo tempo as ſuperficies do fluido nos dous vaſos ſe achaõ reſpectivamente em* QP, KV ; *pergunta-ſe a relaçaõ das alturas verticais* QR, KX, *e a expreſſaõ do tempo.*

Seja $KX = x$, $KV = X$ funçaõ de x dada pela figura do vaſo AN ; $QR = y$, $QP = Y$ funçaõ de y dada pela figura do vaſo IT ; a area do orificio $M = M$, e a do orificio $N = N$. Sendo $QF = y - x$ a altura devida á velocidade em M, teremos $2Mdt\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}$ por expreſſaõ da agua que paſſa por M no inſtante dt (n. 233.) : porém eſta tem por outro valor $-Ydy$; logo acharemos

$$dt = \frac{-Ydy}{2M\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}}.$$

Se da quantidade de agua $2Mdt\sqrt{a}\cdot\sqrt{(y-x)}$, que o vaſo IT fornece a cada inſtante ao vaſo AN, tirarmos a que eſte lança pelo orificio N, o reſto $2dt\sqrt{a}\,[M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}]$ ſerá o incremento de agua no vaſo AN, que deve ſer igual a Xdx ; donde tiraremos

$$dt = \frac{Xdx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x})}.$$

Igualando pois entre ſi os dous valores de dt, teremos

$$\frac{Ydy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{Xdx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0;$$

equaçaõ fundamental, que ſeria neceſſario integrar, para conhecer a relaçaõ entre x e y, e depois diſſo a expreſſaõ do tempo ; mas eſta integraçaõ naõ ſe póde fazer em geral.

330 Quando os vaſos ſaõ, ou podem julgar-ſe priſmaticos, a equaçaõ ſerá homogenea, e conſeguintemente ſeparavel, porque entaõ Y, X ſaõ conſtantes. Supponhamos pois $Y = A$, $X = B$, e fazendo primeiro $y = xz$, e depois $z - 1 = u$, acharemos

dx

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A(Nudu - Mu^2 du)}{MAu^3 - NAu^2 + (MA + BM)u - NA},$$

equaçaõ racional, e conſeguintemente integravel pelos methodos conhecidos.

Daqui ſe vê em geral, que ſendo ambos os vaſos priſmaticos, x e y podem ſempre repreſentar-ſe por funções de huma meſma variavel; e que por conſeguinte póde tambem determinar-ſe t por huma funçaõ da meſma variavel.

331 Ha hum caſo muito ſimples, e que ſuccede muitas vezes na pratica. Supponhamos que o vaſo AN naõ deſpeja agua por N, ou ao menos que naõ deſpeja quantidade attendivel a reſpeito da que entra por M. Entaõ, ſendo os vaſos priſmaticos, a equaçaõ geral ſe reduz a $Ady + Bdx = 0$; e integrando de maneira que deſvaneça quando $y = RO = b$, e $x = XZ = b$, acharemos $Ay + Bx = Ab + Bb$. Tirando daqui o valor de x, e ſubſtituindo-o na primeira expreſſaõ de dt; depois integrando, e completando o integral de maneira que $t = 0$ de $y = b$, teremos

$$t = \frac{A\sqrt{B}}{M(A+B)\sqrt{a}}\left[\sqrt{(Bb - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ab - Bb]}\right].$$

Para determinar o momento, em que a agua chega a por-ſe de livel nos dous vaſos, he neceſſario fazer $x = y = \frac{Ab + Bb}{A + B}$; e entaõ acharemos

$$t = \frac{AB}{M(A+B)}\sqrt{\frac{b-b}{a}}.$$

332 Probl. III. *Tendo o vaſo cylindrico VN* (Fig. 100.) *hum pequeno orificio no fundo* K, *e mergulhando-ſe verticalmente em hum fluido indefinido, cuja ſuperficie por conſeguinte naõ ſobe nem deſce; achar o tempo que gaſta a ſuperficie da agúa em chegar a huma altura dada EG.*

Eſte problema he exactamente da meſma eſpecie que o primeiro. Porque ſuppondo que a agua tem já chegado a RS para naõ haver abalo ſenſivel no fluido $RMNS$ da parte do que entra por K, acharemos pela meſma raſaõ

$$t = \frac{A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{K\sqrt{a}};$$

ſendo

ſendo A a area da baſe do cylindro, K a do orificio, t o tempo que gaſta a ſuperficie em ſubir de R até E, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo.

333 Se o cylindro eſtiveſſe cheio até VT, e ſe deſpejaſſe por K dentro do fluido, he igualmente manifeſto que o exceſſo da altura do fluido interior ſobre a do exterior produziria o movimento deſcenſional. Aſſim acharíamos o tempo, que gaſta a ſuperficie em deſcer de VT até OL, pela equaçaõ

$$t = \frac{A(\sqrt{VA} - \sqrt{OA})}{K\sqrt{a}}.$$

Quando o orificio K he infinitamente pequeno, a ſuperficie naõ paſſa do livel AC em ambos os caſos; mas tendo K huma raſaõ ſenſivel com a amplitude do cylindro, a ſuperficie chegará a AC com huma velocidade finita, a qual naõ póde ſer deſtruida ſenaõ pela gravidade no primeiro caſo, e pela preſſaõ do fluido exterior no ſegundo. Aſſim fará a ſuperficie pequenas oſcillações acima e abaixo de AC até ſe pôr de livel. Entaõ ſerá neceſſario recorrer á ſoluçaõ geral do problema ſeguinte.

334 Probl. IV. *Tendo o vaſo* VN (Fig. 101.) *qualquer abertura no fundo* pq, *e ſendo mergulhado verticalmente no fluido* $BKDF$ *de qualquer outro vaſo; determinar as circunſtancias do movimento.*

No inſtante em que ſe abre o orificio pq, as duas porções de fluido $ABPM$, $CFQN$ comprimem o fluido inferior $PQDK$, como ſe foſſem dous embolos applicados verticalmente ás baſes PM, QN. Em conſequencia deſtas preſſões ſobe o fluido pelo vaſo MT, ſem perder a continuidade com o reſto da maſſa; e a cada inſtante deve haver igualdade entre as forças perdidas pelas columnas $ABPM$, $CFQN$, e as forças ganhadas pelo fluido $MGIN$ que ſobe pelo vaſo MT.

Imaginemos pois o fluido exterior $ABPM + NCFQ$ e o interior $GMNI$ divididos em huma infinidade de camadas horizontais e iguais entre ſi, repreſentadas por $Hufb + Xzcx$, e por $OLlo$, e ſupponhamos $Sp = p$, $Rp = z$, $Ep = q$, $Yp = x$, a area do orificio $pq = K$, a velocidade em $pq = u$, e a altura que lhe he devida $= r$, a area repreſentada por $OL = y$, e a velocidade

dade della $= v$, a area repreſentada por $H u + z X = s$; e a velocidade della $= V$, as areas $G I = M$, $B A + C F = P$, $P M + N Q = Q$, a gravidade $= g$, o elemento do tempo $= d t$.

Iſto poſto, eſtá claro que o fluido deſcendente animado em cada huma das ſuas camadas da velocidade $g d t - d V$ deve fazer equilibrio a cada inſtante com o fluido aſcendente animado em cada huma das ſuas camadas da velocidade $g d t + d v$. Logo teremos a equaçaõ $\int d z (g d t - d V) = \int d x (g d t + d v)$, ou

$$\int d z (g d t - d V) - \int d x (g d t + d v) = 0.$$

Porém $v = \frac{K u}{y}$, $d v = \frac{K (y d u - u d y)}{y y}$, $V = \frac{K u}{s}$, $d V = \frac{K (s d u - u d s)}{s s}$, $d t = \frac{d x}{v} = \frac{d z}{V} = \frac{y d x}{K u} = \frac{s d z}{K u}$.

Logo a equaçaõ precedente ſerá reduzida á forma ſeguinte

$$\frac{g s d z}{K u} \int d z - K d u \int \frac{d z}{s} + K u s d z \int \frac{d s}{s^3} - \frac{g y d x}{K u} \int d x$$

$$- K d x \int \frac{d x}{y} + K u y d x \int \frac{d y}{y^3} = 0.$$

As integrações indicadas devem effeituar-ſe para as alturas inteiras p, q. Aſſim teremos $\int d z = p$, $\int d x = q$; e ſupponhamos, que para as meſmas alturas he $\int \frac{d x}{y} = N$, $\int \frac{d z}{s} = N'$. Além diſſo $\int \frac{d y}{y^3}$ deve deſvanecer quando $y = M$, e receber o valor completo quando $y = K$; e do meſmo modo $\int \frac{d s}{s^3}$ deve deſvanecer quando $s = P$, e receber o ſeu valor completo quando $s = Q$. Em fim, ſendo $E e$ a altura da camada $G I i g$ temos $y d x = s d z = M . E e$. Logo a equaçaõ precedente ſe mudará para eſta forma

M,

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - K\,dr\,(N+N') + M.Ee.Kr\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0;$$

equaçaõ geral, que dá o movimento do fluido nos dous vaſos, e que ſe integra pelos methodos, que já havemos praticado.

335 Se o vaſo MT for hum cylindro vertical, e o vaſo BD tiver huma largura infinita, o fluido poderá nelle conſiderar-ſe eſtacionario, e os termos $N'K\,dr$, $M.Ee.Kr\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$ ſeraõ infinitamente pequenos em comparaçaõ dos outros, e as quantidades M, p conſtantes. Entaõ ſerá a equaçaõ

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - KN\,dr + M.Ee.Kr\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

E ſe neſta equaçaõ ſuppuzermos K infinitamente pequeno em comparaçaõ de M, reſultará $r = p - q$, iſto he, a altura devida á velocidade no orificio igual á differença entre a altura conſtante do fluido exterior e a altura actual do interior, como haviamos ſuppoſto no problema precedente.

336 Suppondo, que o vaſo MT contém licor acima do livel BF, e que ſe deſpeja no vaſo BD pelo orificio pq, a equaçaõ primitiva ſerá

$$\int dx\,(g\,dt - dv) - \int dz\,(g\,dt + dV) = 0,$$

ſobre a qual ſe faraõ operações analogas ás precedentes.

337 Quando ſe houver de applicar eſta theorica a exemplos particulares, he neceſſario lembrar que ſendo o orificio pq aberto em huma parede delgada deve diminuir-ſe por cauſa da contracçaõ na raſaõ de 16 para 10 quando elle he pequeno em comparaçaõ do fundo MN, e na raſaõ de 16 para 13 quando for igual ao meſmo fundo. E fazendo as correcções convenientes para os caſos intermedios, achar-ſe-ha que a theorica concorda muito bem com a experiencia, ao menos depois que o fluido tiver adquirido alguma altura no cylindro MT.

338 PROBL.

338 Probl. V. *Sendo o vaſo priſmatico AK, que communica com o tubo* KL, *atraveſſado de muitos diaphragmas EF, OP, VH, nos quais ſe tem feito as pequenas aberturas G, M, N; pergunta-ſe a lei, pela qual ſe ha de deſpejar pelo pequeno orificio D* (Fig. 102.).

Seja *TB* a altura primitiva do fluido, e ſupponhamos que em certo tempo ſe acha a ſuperficie delle em *ab*. Pelo methodo do n.º 259 acharemos na primeira poſiçaõ, que a altura devida á velocidade em *D* he repreſentada por

$$TB \times \frac{G^2 M^2 N^2}{Q^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2};$$

e na ſegunda por

$$Tb \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}.$$

Por eſtas expreſſoens ſe vê, que na extenſaõ do eſpaço *BF* corre o fluido em *D*, como ſe o vaſo *AT* naõ tiveſſe diaphragmas, e foſſe a altura variavel do fluido igual á que acabamos de determinar. Aſſim acharemos o tempo correſpondente a BF pelo methodo do n.º 313.

Quando a ſuperficie do fluido chega a *EF*, o movimento he como ſe naõ exiſtiſſe o diaphragma, ou como ſe o orificio *G* foſſe infinito em comparaçaõ dos outros. Fazendo pois $G = \infty$, acharemos que eſtando a ſuperficie em *EF* a altura devida a velocidade em *D* he repreſentada por

$$TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2};$$ e que chegando a qualquer outra poſiçaõ indeterminada *ef*, a dita altura ſerá

$$Tf \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}.$$

Do meſmo modo, quando a ſuperficie chegar a OP faremos $M = \infty$, e acharemos a expreſſaõ da altura devida á velocidade, e do tempo correſpondente; e aſſim por diante. Em fim ajuntando todos os tempos pareiais conheceremos o tempo total, que a ſuperficie gaſta em deſcer huma altura dada.

339 Pelas expreſſoens das alturas devidas ás velocidades do fluido em *D*, eſtá claro que a velocidade diminue á medida

dida que a ſuperficie deſce de B até F; que chegando a ſuperficie a F ſe aumenta a velocidade em D, e que de F até P torna a diminuir, e aſſim por diante. As diſtancias dos diaphragmas podem ſer de tal ſorte reguladas, que as velocidades em D variem de huma quantidade dada á medida que o fluido paſſa de hum repartimento para outro. Supponhamos, por exemplo, que as aberturas G, M, N, D, ſaõ iguais entre ſi, e que ſe pede que as velocidades em D, quando a ſuperficie ſe acha em B, F, P, H ſejaõ tambem iguais. Para iſſo igualaremos entre ſi as alturas devidas a eſtas velocidades, e teremos $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2} = TH \times 1$, e por conſeguinte $TH = HP = PF = FB$. Donde ſe vê, que ſendo as alturas TB, TF, TP, TH em progreſſaõ arithmetica decreſcente cuja raſaõ he TH, a velocidade em D ſerá conſtantemente devida á altura TH, quando a ſuperficie eſtiver em B, F, P, H. Eſta theorica he conforme a huma experiencia de M. Mariotte. Veja-ſe a Fig. 83 do ſeu *Tratado do Movimento das aguas* com o diſcurſo que lhe diz reſpeito. A explicaçaõ que elle dá da experiencia he erronea.

340 Probl. VI. *Sendo o vaſo priſmatico* AT (Fig. 103.) *atraveſſado de dous diaphragmas* EF, OP *com duas aberturas* M, N, *e eſtando os tres repartimentos* AF, EP, OK *cheios de licores de differente eſpecie; determinar o movimento com que ſe ha de deſpejar pelo pequeno orificio* D.

Supponhamos, que no primeiro inſtante eſtando a ſuperficie do fluido ſuperior em AB, a velocidade delle em M he devida á altura BS analoga a BF, a velocidade do fluido EP em N devida á altura SV analoga a FP, e a velocidade do fluido OK em D devida á altura TV analoga a TP. Seja $BS = x$, $SV = y$, $VT = z$; e havendo de paſſar em hum inſtante dt igual quantidade de fluido pelas tres aberturas M, N, D, teremos $2Mdt\sqrt{ax} = 2Ndt\sqrt{ay} = 2Ddt\sqrt{az}$, e conſeguintemente $y = \frac{M^2 x}{N^2}$, $z = \frac{M^2 x}{D^2}$.

Iſto poſto, ſeja a gravidade eſpecifica do fluido $OK = p$, a do fluido $EP = p'$, e a do fluido $AF = p''$, $BF = b$,

$= b$, $FP = c$, $PT = f$; e obſervando que as alturas BS e BF, SV e FP, VT e PT, que correſpondem duas a duas aos tres fluidos, devem ſer multiplicadas pelas gravidades eſpecificas reſpectivas delles, para ſe reduzirem a huma meſma unidade de medida, teremos $p\,z + p'\,y + p''\,x = p\,f + p'\,c + p''\,b$. E comparando eſta equaçaõ com as duas precedentes, acharemos

$$x = \frac{N^2\,D^2\,(p\,f + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}$$

$$y = \frac{M^2\,D^2\,(p\,f + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}$$

$$z = \frac{M^2\,N^2\,(p\,f + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}.$$

Determinadas aſſim as alturas devidas ás velocidades em M, N, D para o primeiro inſtante, ſupponhamos que depois de certo tempo as ſuperficies dos fluidos ſe achaõ em ab, ef, op. Eſtá claro, que teremos ſempre $bf = BF$, $fp = FP$, e que ſómente a altura Tp do ultimo fluido he variavel. Aſſim, deſignando Tp por k, acharemos pelo meſmo methodo para qualquer poſiçaõ indeterminada dos tres fluidos, as alturas devidas ás velocidades

$$\text{em } M = \frac{N^2\,D^2\,(p\,k + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}$$

$$\text{em } N = \frac{M^2\,D^2\,(p\,k + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}$$

$$\text{em } D = \frac{M^2\,N^2\,(p\,k + p'\,c + p''\,b)}{p\,M^2\,N^2 + p'\,M^2\,D^2 + p''\,N^2\,D^2}.$$

341 Para moſtrar huma applicaçaõ muito ſimples deſtas formulas, ſupponhamos que naõ ha mais que dous fluidos, ou que ſe aniquila o ſuperior AF com o diaphragma EF; que o repartimento OK eſtá cheio de agua, e EP de ar. Aſſim teremos $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{p'}{p} = \frac{1}{850}$; e porque as preſſoens do ar exterior em N e D fazem equilibrio entre ſi, ſerá tambem $c = 0$. Logo a altura devida á velocida-

cidade do ar na paſſagem por N ſerá repreſentada por $\frac{850\,k\,D^2}{D^2+850\,N^2}$, e a altura devida á velocidade da agua em D por $\frac{850\,k\,N^2}{D^2+850\,N^2}$.

Quando a abertura D he infinitamente pequena em comparaçaõ de N, a primeira altura deſvanece, e a ſegunda ſe faz igual a k, como deve ſer. Se ambas as aberturas forem iguais, as velocidades do ar em N, e da agua em D ſeraõ iguais, e devidas á altura $\frac{850}{851}\,k$ &c. Por eſta theorica ſe fará a idêa juſta da velocidade, com q[illegible] ſahe vinho pela torneira de huma pipa, quando o buraco deſtinado a introduzir o ar pela parte ſuperior he muito pequeno.

Comparaçaõ da theorica precedente com a experiencia.

342 QUando hum vaſo cheio de agua ſe deixa eſgotar por hum orificio aberto no fundo, a ſuperficie do fluido em chegando a certa diſtancia delle começa a formar huma cavidade, á maneira de hum funil, com a ponta dirigida para o orificio. A fallar em rigor, eſta cavidade deve exiſtir deſde o principio; porque havendo de ſer ſubſtituido o fluido que ſahe, por outro conſecutivamente, e naõ podendo iſſo fazer-ſe em hum inſtante, he manifeſto que as particulas adjacentes devem ter huma tendencia continua para o lugar que ſe deſoccupa, ſemelhante á que tem os corpos ſituados em hum plano inclinado. Mas em quanto o fluido tem huma altura conſideravel, a maior preſſaõ faz que ſeja mais pronto o movimento das particulas, e que a cavidade naõ ſeja por conſeguinte ſenſivel, ſenaõ quando a ſuperficie chega perto do fundo. Tambem concorre para iſſo a columna vertical do ar que correſponde ao orificio, a qual naõ he perfeitamente equilibrada pela preſſaõ contraria da columna applicada da parte inferior ao meſmo orificio, porque eſta ſendo repellida pelo movimento da agua, que ſahe por elle, gaſta niſſo huma parte da ſua acçaõ.

343 Naõ

343 Naõ ſe póde dizer em geral a altura, em que a cavidade começa a apparecer, ſobre hum orificio horizontal. Iſſo depende de muitas circunſtancias phyſicas, que naõ ſaõ as meſmas em todos os caſos. Se a agua naõ eſtiver em quietaçaõ, mas tiver algum movimento de oſcillaçaõ, ou turbinaçaõ, logo deſde o principio começará a formar-ſe a cavidade; e ſe eſtiver em quietaçaõ, a ſuperficie ſerá ſenſivelmente plana até chegar perto do fundo. Nos orificios laterais deſce a ſuperficie ſem alteraçaõ ſenſivel até a borda ſuperior delles; e entaõ forma-ſe huma cavidade ao comprido na direcçaõ do orificio, e com huma pequena inclinaçaõ para a parte delle.

344 Como a formaçaõ da cavidade produz alguma irregularidade, e incerteza no fim do deſaguamento, para verificarmos a theorica deſte Capitulo obſervámos os tempos, que gaſtava a ſuperficie da agua em deſcer huma altura dada, antes de ſe effeituar a cavidade. Para iſſo nos ſervimos de hum vaſo parallelepipedo rectangular ſituado verticalmente de 12 pés de altura, ſendo a baſe hum quadrado de tres pés por cáda lado interior; e os orificios eraõ horizontais, abertos em huma chapa de cobre de meia linha de groſſura.

Sendo pois ſempre a altura primitiva do fluido acima do orificio de 11 pés, e 8 pollegadas, achámos

I. Que ſahindo a agua por hum orificio circular de huma pollegada de diametro, a ſuperficie della ſe abaixava 4 pés em $7' 25'', 5$.

II. E que ſahindo pelo meſmo orificio ſe abaixava a ſuperficie da agua 9 pés em $20' 24'', 5$.

III. Que ſahindo a agua por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſcia a ſuperficie 4 pés em $1' 52''$.

IV. E que ſahindo pelo meſmo orificio, a ſuperficie da agua deſcia 9 pés em $5' 6''$.

345 Calculando eſtas experiencias pela formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$, que compete a eſte caſo (n. 312), e havendo reſpeito á contracçaõ da veia, acharemos na primeira experiencia $t = 7' 22'', 4$, na ſegunda $t = 20' 16''$, na terceira $t = 1' 50'', 6$, e na quarta $t = 5' 4''$. Eſtes tempos ſaõ ſenſivelmente iguais aos obſerva-

ſervados ; e reflectindo nas circunſtancias , que podem alterar os reſultados das meſmas experiencias , parece que naõ podia eſperar-ſe maior conformidade. Aſſim concluiremos , que havendo reſpeito á contracçaõ da veia , póde a theorica applicar-ſe com exactidaõ ſufficiente aos uſos da pratica.

CAPITULO III.

Do movimento das aguas nas fontes de repuxo.

346 AS aguas , que devem fornecer a deſpeza de huma fonte de repuxo , ajuntaõ-ſe em huma arca , ou reſerva *ADCB* (Fig. 104.) , donde ſaõ conduzidas ao ponto *O* por hum cano *GEO* , que ſe chama *tubo conductor* , ou ſimpleſmente *conductor*.

347 Qualquer que ſeja a direcçaõ de hum repuxo , a quantidade de agua que deſpende he ſempre a meſma , com tanto que o orificio *O* , e a altura *FO* da reſerva ſejaõ as meſmas ; e eſta quantidade ſe calculará pelos methodos que propuzemos no Capitulo I. Agora examinaremos os meios de procurar , que os repuxos de agua tenhaõ toda a altura , ou amplitude que he poſſivel.

Dos repuxos verticais.

348 COmo a agua ao ſahir de hum orificio muito pequeno tem huma velocidade capaz de a fazer ſubir á altura do livel da arca *AB* (Fig. 104.) ; he evidente que o repuxo *OF* devia elevar-ſe á meſma altura , ſe naõ houveſſe muitas cauſas que lhe ſerveõ de obſtaculo , como a fricçaõ contra o circuito do orificio , e a reſiſtencia do ar. O effeito da fricçaõ he pequeno , mas o da reſiſtencia do ar he muito conſideravel , principalmente nas grandes alturas.

349 A eſtas duas cauſas ſe ajunta o embaraço , que ſe fazem reciprocamente as particulas da agua. Porque ſendo cheio dellas o eſpaço comprehendido entre o orificio , e

o ponto onde acaba a ſua velocidade primitiva , eſtá claro que as moleculas que vaõ ſahindo empregaõ parte da ſua força na percuſſaõ das que encontraõ no caminho ; donde reſulta alargar-ſe a colunna á medida que ſe aparta do orificio , e perder huma parte da ſua velocidade. Além diſſo , quando o repuxo he bem vertical , as particulas que tem ſubido ao alto tornaõ a cahir pelo meſmo caminho em virtude da gravidade , embaraçaõ , e enfraquecem a velocidade das particulas aſcendentes ; e por iſſo ſe obſerva , que inclinando hum pouco a direcçaõ do repuxo , ſobe eſte hum pouco mais alto.

350 Os repuxos mais groſſos ſobem mais alto que os delicados , porque ſendo as velocidades primitivas iguais os primeiros tem huma maſſa maior , e conſeguintemente mais força para vencer os obſtaculos contrarios. Quando as alturas ſaõ pequenas eſta differença he inſenſivel. Mas ſem embargo da maior altura , as quantidades de fluido que lançaõ naõ ſaõ maiores á proporçaõ , porque eſſas dependem das velocidades ao ſahir dos orificios , as quais ſaõ iguais preſcindindo do effeito da fricçaõ.

351 Para comparar as alturas dos repuxos com as do livel da reſerva , ao vaſo parallelepipedo rectangular , e vertical *AC* (Fig. 105.) de 12 pés de altura , cuja baſe era hum quadrado de 3 pés por cada lado , applicámos o tubo horizontal *OE* de folha de flandes tapado em *E* , de 6 pés de comprido , e de 3 pollegadas , e 8 linhas de diametro , no qual eſtavaõ abertos differentes orificios pela parte ſuperior *OF*. E conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 11 pés acima da parede ſuperior *OF* , achámos

I. Que o repuxo vertical pelo orificio *F* de 2 linhas de diametro ſe levantava á altura de 10 pés , e 10 linhas ; e inclinando hum pouco a direcçaõ , a 10 pés 4 pollegadas , e 6 linhas.

II. Que pelo orificio *G* de 4 linhas de diametro ſubia a 10 pés , 5 pollegadas , e 10 linhas ; e inclinando hum pouco a direcçaõ a 10 pés , 7 pollegadas , e 6 linhas.

III. Que pelo orificio *H* de 8 linhas de diametro ſubia a 10 pés , 6 pollegadas , e 6 linhas ; e inclinando hum pouco a direcçaõ , a 10 pés , e quaſi 8 pollegadas.

IV. Que

IV. Que pelo tubo conico K *M* de 5 pollegadas e 10 linhas de altura, que tinha o diametro da baſe inferior de 9 linhas, e o da ſuperior de 4, ſe levantava a agua a 9 pés, 6 pollegadas, e 4 linhas.

V. E que pelo tubo cylindrico *I N* de 5 pollegadas e 10 linhas de altura, e de 4 linhas de diametro, ſe elevava a agua á altura de 7 pés, 1 pollegada, e 6 linhas; formando a agua columnas muito bellas em todas eſtas experiencias, principalmente nas duas ultimas.

352 Ao meſmo vaſo *A C* (Fig. 106.) fizemos applicar outro tubo horizontal *O E* do meſmo comprimento que o primeiro, e que tinha de diametro de 9 até 10 linhas. E conſervando ſempre o vaſo cheio na altura de 11 pés acima da linha *O F*, achámos

VI. Que o repuxo vertical pelo orificio *F* de 2 linhas de diametro ſe levantava a 9 pés, e 11 pollegadas.

VII. Que pelo orificio *G* de 4 linhas de diametro ſubia a 9 pés, 7 pollegadas, e 10 linhas, desfigurando-ſe muito a columna, e eſpalhando-ſe na parte ſuperior.

VIII. E que pelo orificio *H* de 8 linhas de diametro naõ ſubia mais que a 7 pés, e 10 pollegadas, ſendo a columna extremamente eſpalhada, como formada de repuxos diſtinctos que ſuccediaõ huns aos outros.

353 Pelas tres primeiras experiencias ſe vê, que quando o tubo conductor fornece a agua com abundancia, os repuxos groſſos ſe elevaõ mais que os delgados; mas, ſendo o tubo conductor muito eſtreito, pelas tres ultimas ſe moſtra que os primeiros naõ ſobem taõ alto como os ſegundos. He pois neceſſario, que o diametro do conductor tenha certa raſaõ com o do orificio, para que a agua ſe levante a toda a altura que lhe he poſſivel. Mais abaixo determinaremos eſta grandeza.

354 Muitas vezes ſe fazem os bocais dos repuxos guarnecidos de tubos addicionais conicos, ou cylindricos. Eſte uſo he muito vicioſo, porque deſſa fórma (Exp. IV e V) naõ ſe eleva a agua a tanta altura. Os melhores orificios ſaõ os que ſe abrem na chapa horizontal que tapa a extremidade do conductor, a qual deve ſer delgada, de eſpeſſura uniforme, bem polida, e furada perpendicularmente.

355 Da comparaçaõ das experiencias precedentes, aſſim como das que fez M. Mariotte ſobre a meſma materia,

ria, reſulta que *as differenças entre as alturas dos repuxos verticais, e as alturas das reſervas ſaõ entre ſi ſenſivelmente na raſaõ duplicada das alturas dos repuxos.*

Sendo pois a altura de hum repuxo dado $= a$, e a da ſua reſerva $= b$, a altura de outro repuxo $= r$, e a da ſua reſerva $= z$, teremos $b - a : z - r :: a^2 : r^2$; donde ſe tira $r = \frac{-a^2 + a\sqrt{[a^2 + 4z(b-a)]}}{2(b-a)}$, ou $z = r + \frac{r^2(b-a)}{a^2}$. Aſſim, ſendo dada a altura da reſerva, ſe conhecerá a do repuxo; e reciprocamente.

356 Tambem ſe vê pelas primeiras experiencias, que póde ganhar-ſe alguma couſa na altura dos repuxos, quando ſe deſviaõ hum pouco da direcçaõ vertical; mas entaõ naõ produzem hum effeito taõ agradavel á viſta.

357 Algumas vezes a agua, que ſahe pelo orificio, falta a muito maior altura do que permitte a altura da reſerva. Eſte phenomeno, ſempre momentaneo, he produzido pelo ar que traz a agua comſigo pelo conductor. Eiſaqui de que modo.

Supponhamos, que eſtando o orificio *O* tapado (Fig. 104.) o ar ſe tem ajuntado no pequeno eſpaço *mnub*, extremidade do conductor. Entaõ deſtapando o orificio, eſte ar ſahe para fóra, e a agua cahe no eſpaço que elle deixa vazio, e adquire no conductor huma velocidade, que ao ſahir pelo orificio ſe aumenta na raſaõ da area do orificio para a area da ſecçaõ perpendicular ao conductor. Porque ſendo *Ee* o eſpaço, que a agua corre no conductor em hum inſtante, eſtá claro que no meſmo tempo deve ſahir por *O* hum volume igual ao pequeno cylindro *eEHb*; e conſeguintemente ſerá a velocidade em *O* para a velocidade em *eb*, como a ſecçaõ *eb* para o orificio *O*. Aſſim póde ſer muito conſideravel a velocidade nos primeiros inſtantes, a qual bem depreſſa ſe reduz pela reſiſtencia dos obſtaculos ao eſtado natural, como effeito de huma cauſa accidental, e momentanea. Alguns autores attribuem erroneamente eſte phenomeno á elaſticidade do ar, que vem atraz da agua que ſahe pelo orificio, porque eſſe ar move-ſe com a agua contí-

gua,

gua, como ſe moveria a porçaõ da agua, cujo lugar occupa.

358 Ja havemos advertido que o conductor deve ſer de certo diametro, para que o repuxo tenha a maior elevaçaõ que lhe he poſſivel (n. 353.). Examinemos agora o menor diametro que ſe lhe pode dar relativamente ao do orificio, ſem prejudicar á altura do repuxo.

Seja a altura da reſerva $= b$, o diametro do conductor $= D$, o do orificio $= d$, a velocidade do fluido no conductor $= u$; e conſiderando que a velocidade permanente ao ſahir do orificio póde repreſentar-ſe por $\sqrt{b}$, teremos $\sqrt{b} : u :: DD : dd$, e por conſeguinte $u = \frac{dd}{DD}\sqrt{b}$. Pela meſma raſaõ em outro qualquer caſo, deſignando as quantidades analogas a D, d, u, b pelas meſmas letras accentuadas, teremos $u' = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{b'}$.

Iſto poſto, querendo que os dous repuxos ſejaõ fornecidos de agua da meſma maneira, faremos $u = u'$, ou $\frac{dd}{DD}\sqrt{b} = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{b'}$. Donde ſe tira $DD : D'D' :: dd\sqrt{b} : d'd'\sqrt{b'}$, ou $D : D :: d\sqrt[4]{b} : d'\sqrt[4]{b'}$, iſto he, *os diametros dos conductores deveráõ ſer entre ſi na raſaõ compoſta da raſaõ dos diametros dos orificios e da ſubquadruplicada das alturas das reſervas.*

Conhecendo pois por huma experiencia immediata o menor diametro, que póde ter hum conductor para ſupprir ao producto de hum orificio dado, debaixo de huma altura dada, ſem prejuizo da altura do repuxo, facilmente calcularemos o diametro competente para outros caſos.

359 Em conſequencia diſto, tomámos hum tubo de folha de flandes (Fig. 107.) de huma pollegada de diametro, guarnecido de hum grande funil ABC para receber a agua, que devia fornecer a deſpeza dos differentes orificios applicados ſucceſſivamente á extremidade O. E conſervando a altura da reſerva FO conſtantemente de 3 pés, 2 pollegadas, e 11 linhas, obſervámos as alturas dos repuxos deſta maneira

Diametros dos orificios	Alturas dos repuxos		
1 *linh.*	3 *pés*	1 *poll.*	6 *linh.*
2	3	1	8
3	3	2	0
4	3	1	7
5	3	1	5
6	3	0	4

360 Donde ſe vê, que hum orificio muito pequeno faz perder alguma couſa na altura do repuxo, pela raſaõ que acima diſſemos (n. 350.). Mas a grandeza do orificio tem ſeus limites; e por eſtas experiencias podemos eſtabelecer, que para hum conductor de huma pollegada de diametro, e para huma altura de reſerva de 3 pés, 2 pollegadas e 11 linhas, o orificio mais ventajoſo deve ter o diametro de $3\frac{3}{4}$ linhas proximamente.

Suppoſta eſta determinaçaõ, ſe buſcarmos qual deve ſer o diametro do conductor, para huma reſerva de 52 pés de altura, e hum orificio de 6 linhas de diametro, pela regra acima eſtabelecida (n. 358.), acharemos que o conductor deve ter de diametro 38 linhas, que differe muito pouco de 36 linhas, que M. Mariotte determinou pela experiencia. Para facilitar os calculos, ſupporemos que para a altura de 16 pés, e hum orificio de 6 linhas, he neceſſario que o diametro do conductor ſeja de 28 linhas e meia. Aqui naõ fazemos menção da contracçaõ da veia, porque entra do meſmo modo nas raſões que conſideramos.

361 Se hum cano houver de ſervir de conductor a differentes repuxos, he neceſſario buſcar a area de hum orificio igual á ſoma das areas de todos os orificios propoſtos, e determinar o diametro do conductor, como ſe houveſſe de fornecer a agua ao orificio achado. Os conductores naõ devem ſer mais eſtreitos do que permitte a regra, que havemos apontado; mas naõ ſe perde nada na pratica em ſe lhes dar mais largura, antes aſſim he neceſſario, para compenſar o que elles ſe eſtreitaõ com

o

o tempo, criando limo pelas paredes interiores, e enchendo-ſe de alguns outros obſtaculos. Deve procurar-ſe, que os conductores naõ façaõ angulos, nem cotovelos muito violentos, porque deſtroem grande parte da velocidade; mas ſendo, como he quaſi ſempre, neceſſario encurvallos, a curvatura ſe diſtribuirá docemente por todo o ſeu comprimento, ou ao menos por hum grande eſpaço delle.

362 Para facilitar mais a applicaçaõ pratica dos principios, que havemos eſtabelecido, ajuntaremos aqui huma Taboa, na qual ſe contém para differentes alturas de repuxos por hum orificio de 6 linhas de diametro, as alturas competentes da reſerva, as quantidades que deſpendem em hum minuto, contadas em libras das quais 72 fazem hum pé cubico, e os diametros que ſe haõ de dar aos conductores, a fim de que os repuxos tenhaõ a maior elevaçaõ poſſivel. As alturas das reſervas ſaõ as meſmas, que ſe achaõ na obra de M. Mariotte. Os productos foraõ calculados pelo methodo no nº. 302. E os diametros dos conductores foraõ calculados pela regra do nº. 358, ſuppondo que para hum orificio de 6 linhas de diametro, debaixo de 16 pés de altura, deve o conductor ter 28 linhas e meia de diametro. Faltava huma columna, para determinar a groſſura que devem ter as paredes dos conductores para reſiſtirem á preſſaõ, que em cada hum dos caſos ſe exercita contra ellas. Mas eſta determinaçaõ depende dos principios, que havemos de expor no Capitulo ſeguinte.

Altu-

Alturas dos Repuxos	Alturas das Reservas		Productos effectivos por hum orificio de 6 linhas de diametro	Diametros dos conductores
Pés	*Pés*	*Polleg.*	*Libras*	*Linhas*
5	5	1	64	21
10	10	4	90	26
15	15	9	112	28
20	21	4	130	31
25	27	1	146	33
30	33	0	162	34
35	39	1	176	36
40	45	4	190	37
45	51	9	202	38
50	58	4	216	39
55	65	1	228	40
60	72	0	240	41
65	79	1	250	42
70	86	4	262	43
75	93	9	272	44
80	101	4	284	45
85	109	1	294	46
90	117	0	304	47
95	125	1	316	48
100	133	4	326	49

363 Ainda que a applicaçaõ dos reſultados deſta Taboa, e das regras precedentes, naõ tem difficuldade, moſtralla-hemos com tudo em dous exemplos.

Exemplo I. *Pertende-ſe fazer hum repuxo vertical de* 44 *pés de altura por hum orificio de huma pollegada de diametro; pergunta-ſe a altura da reſerva, a quantidade de agua, e o diametro do conductor.*

1º Por quanto hum repuxo de 45 pés requer a altura da reſerva de 51 pés e 9 pollegadas, na formula do nº. 355 teremos $a = 45$, $b = 51$ pés 9 poll., $r = 44$ pés,

e

e acharemos a altura procurada $z = 50$ pés, e 7 pollegadas.

2º Fazendo a porporçaõ $\sqrt{}$ (51 pés 9 poll.) : $\sqrt{}$ (50 pés 7 poll.) : : 202 libras ? o quarto termo 200 libras ſerá a quantidade de agua, que lançaria o orificio de 6 linhas de diametro debaixo da altura de 50 pés e 7 pollegadas. E multiplicando eſta quantidade por 4, por ſer o orificio propoſto de huma pollegada, teremos 800 libras pelo producto que buſcamos.

3º E praticando eſta porporçaõ $6\sqrt[4]{}$ (51 pés 9 poll.) : $12\sqrt[4]{}$ (50 pés 7 poll.) : : 38 linhas ? o quarto termo 6 pollegadas e 3 linhas ſerá o diametro do conductor (n. 358.).

Exemplo II. *Hum tanque de 4 pés de profundidade, que naõ póde encher-ſe ſenaõ por intervallos, e que contém 20 toeſas cubicas de agua, eſtá elevado 38 pés acima de hum jardim, no qual ſe quer formar hum repuxo por meio da agua que o tanque póde fornecer; pede-ſe a determinaçaõ das circunſtancias relativas ao eſtabelecimento deſte repuxo ?*

Primeiramente buſcaremos o tempo, que o tanque deve gaſtar em ſe eſgotar por hum orificio dado. Para iſſo podia ſervir o Problema acima reſolvido (n. 317.). Mas na pratica podemos, ſem erro ſenſivel, ſuppôr o tanque conſtantemente cheio na ametade da ſua altura, e procurar o tempo que gaſtará em deſpejar por hum orificio dado 20 toeſas cubicas de agua (n. 304.). Aſſim, ſuppondo que do orificio do repuxo até o meio da altura do tanque ſaõ 36 pés, e que o orificio he de huma pollegada, acharemos que o tempo procurado he de $613'$ ou de $10^h\ 13'$. Se quizeſſemos que o repuxo duraſſe quatro vezes mais tempo, ſeria neceſſario tomar hum orificio quatro vezes menor, iſto he, de meia pollegada de diametro &c. Eſtabelecida a grandeza do orificio, conforme o tempo que o repuxo deve durar, o reſto da ſoluçaõ ſe acaba como no exemplo precedente.

Dos

Dos repuxos obliquos.

364 SEja *GEO* (Fig. 108.) o conductor de hum repuxo, que lança a agua por qualquer direcçaõ *OK* inclinada ao horizonte. Eſtá claro, que as particulas do fluido ſeguiriaõ conſtantemente eſta direcçaõ primitiva, ſe a gravidade as naõ deſviaſſe della a cada inſtante, e naõ as obrigaſſe a deſcrever huma curva *OSH*, cuja natureza queremos ſaber.

365 Como a velocidade de qualquer gota ao ſahir do orificio *O* he devida á altura da reſerva *FO*, com ella continuada uniformemente andaria o eſpaço *OK* duplo de *FO* no meſmo tempo, que gaſtaria hum grave em cahir da altura *FO* (n.231.). Tirando dos pontos *O*, K as horizontais *OH*, KI, imaginemos o eſpaço *OK* dividido em huma infinidade de elementos iguais *Oa*, *ab*, *bc* &c, e abaixemos as verticais *ad*, *bf*, *cg* &c, que determinaõ os elementos correſpondentes da curva *Od*, *df*, *fg* &c. Sobre *Od*, *df*, *fg* &c conſtruamos os parallelogrammos *Oadb*, *dlfm*, *fngp* &c, que tenhaõ hum dos lados vertical, e o outro parallelo a *OK*: e produzamos as rectas *fm*, *gp* &c até encontrarem a vertical *ON*. Aſſim podemos conſiderar o movimento da gota propoſta a cada inſtante pelos lados da curva *Od*, *df*, *fg* &c, como compoſto de outros dous, hum vertical produzido pela gravidade, e outro parallelo a *OK* que provêm da impulſaõ inicial. Eſtes movimentos para o primeiro lado ſaõ *Ob* e *Oa*: *dm* ou *bi*, e *dl* ou *ab* para o ſegundo &c; e diſcorrendo ſempre do meſmo modo até que a ſoma dos elementos *Oa*, *ab*, *bc* &c componha a recta finita *OL*, e a ſoma dos elementos *Ob*, *bi*, *ik* &c componha a vertical correſpondente *ON* ou *LM*, veremos que a gota deſcreve a curva *OSH* com eſta lei, que no tempo em que deſcreveria uniformemente qualquer eſpaço *OL* com a velocidade de projecçaõ, andaria em virtude da gravidade o eſpaço correſpondente *ON*, ou *LM*.

Deſignando pois por *a* a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo, ſerá o tempo empregado em cahir da altura *LM* repreſentado por $\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{a}}$, e da altura

tura FO por $\frac{V FO}{Va}$; e por conſeguinte o tempo, que gaſtaria huma gota em correr uniformemente OK com a velocidade de projecçaõ, ſerá tambem $\frac{V FO}{Va}$. Donde acharemos o tempo empregado em correr OL com a meſma velocidade, fazendo eſta proporçaõ, OK ou $2FO : OL :: \frac{V FO}{Va} : \frac{OL.V FO}{2FO.Va} = \frac{OL}{Va.2VFO}$. Logo $\frac{VLM}{Va} = \frac{OL}{Va.2VFO}$, ou $4FO.LM = OL^2$; equaçaõ, que caracteriza a curva procurada OSH.

366 Mas para conhecer mais particularmente eſta curva, obſervaremos que os triangulos ſemelhantes OIK, OQL daõ $OL = \frac{OQ.KO}{KI} = \frac{OK.2FO}{KI}$, $LQ = \frac{OQ.OI}{KI}$, $LM = LQ - MQ = \frac{OQ.OI}{KI} - MQ$. E ſubſtituindo os valores de OL, LM na equaçaõ precedente, acharemos $OQ^2.FO = OQ.OI.KI - MQ.KI^2$. Porém $MQ = 0$ quando $OQ = 0$, e quando $OQ = \frac{OI.KI}{FO}$. Logo tomando $OT = \frac{OI.KI}{2FO} = \frac{OH}{2}$, e elevando a vertical TS, ſerá $ST = \frac{OI^2}{4FO}$. Conduzindo tambem MP perpendicular a ST, ſerá $OQ = OT - MP = \frac{OI.KI}{2FO} - MP$, $MQ = ST - SP = \frac{OI^2}{4FO} - SP$. Logo ſubſtituindo os valores achados de OQ e MQ na equaçaõ $OQ^2.FO = OQ.OI.KI - MQ.KI^2$, feitas todas as reducçoens, acharemos $MP^2 = \frac{KI^2}{FO}.SP$. Donde ſe vê, que a curva OSH he huma parabola, que tem o vertice em S, o eixo ST, e o parametro $= \frac{KI^2}{FO}$.

Seja $FO = b$, o ſeno do angulo $KOI = m$, o ſeu coſeno $= n$; e teremos $KI = m.KO = 2bm$, $OI = n.KO = 2bn$. Logo $ST = \frac{OI^2}{4FO} = bn^2$, $OT = \frac{OI.KI}{2FO} = 2bmn$,

$2bmn$, e o parametro da parabola $\frac{KI^2}{FO} = 4bm^2$;

367 Daqui ſe ſegue eſta conſtrucçaõ. Sobre a altura da reſerva OF, como diametro (Fig. 109.) deſcreva-ſe o ſemicirculo OLF, que encontre em L a direcçaõ inicial do repuxo; e conduzindo a ordenada LN produza-ſe até S de maneira que ſeja $LS = LN$. Do ponto S abaixe-ſe a vertical ST, que encontre em T a horizontal OH. Sobre as coordenadas rectangulas ST, OT deſcreva-ſe a parabola OSH, que tenha o vertice em S; e eſta ſerá a curva que fórma o repuxo. Porque tirando a corda FL, e conſervando as denominaçoens eſtabelecidas, teremos $OT = 2LN = \frac{2FL.OL}{FO} = \frac{2m.FO.n.FO}{FO} = 2bmn$, $ST = NO = NL$; $\frac{n}{m} = bn^2$, e o parametro $\frac{OT^2}{ST} = 4bm^2$.

368 Logo, ſe tomarmos $Fn = ON$, e conſeguintemente $ln = LN$, e ſe deſcrevermos a parabola OsH do meſmo modo que a outra OSH, ambas teraõ os ſeus vertices na meſma vertical TSs, e ſe encontraráõ em H. O meſmo ſuccede em todos os outros pares de parabolas, que ſe podem conſtruir da meſma maneira.

369 Se o terreno naõ foſſe horizontal, mas fizeſſe com a horizontal OH hum angulo dado KOH (Fig. 109.); ſem difficuldade ſe acharia o ponto K, onde a parabola encontra o meſmo terreno. Porque abaixando a vertical KY, e conduzindo a ordenada KZ ao eixo ST, ſupponhamos as quantidades conhecidas $OT = a$, $ST = b$, $TX = c$, e o parametro da parabola $OSH = p$, a incognita KY ou $ZT = x$; e os triangulos ſemelhantes XTO, XZK daraõ $ZK = \frac{OT.ZX}{XT} = \frac{a(x-c)}{c}$. Logo, por ſer $SZ = b-x$, e pela propriedade da parabola, teremos $\frac{a^2(x-c)^2}{c^2} = p(b-x)$; donde ſe tira

$$x = c - \frac{pc^2}{2a^2} \pm \sqrt{\left[\frac{pbc^2}{a^2} - c^2 + \left(c - \frac{pc^2}{2a^2}\right)^2\right]};$$

equaçaõ, que facilmente ſe póde conſtruir por meio do circulo.

370 Quan-

370 Quando o orificio he vertical (Fig. 110.), a parabola OM tem o parametro quadruplo da altura da reſerva BO, e a ordenada $PM = 2\sqrt{(OP.OB)}$.

371 Por eſtas formulas ſe vê, que ſe hum conductor contiver agua, da qual ſe naõ ſaiba a altura acima do orificio, eſta poderá determinar-ſe pela amplitude da parabola que deſcreve o repuxo. Por exemplo, ſe na Fig. 110 naõ conheceſſemos OB, a equaçaõ $PM = 2\sqrt{(OP.OB)}$ nos daria $OB = \frac{PM^2}{4OP}$. De hum modo analogo ſe procederá na hypotheſe geral do n.º 367.

372 Seja $ADCB$ hum vaſo priſmatico vertical (Fig. 110.), que lança agua por hum orificio lateral O. Tomando $OH = OB$, e conduzindo a ordenada HQ da parabola OQM, a recta BQ ſerá a tangente della em Q. E porque $HQ^2 = 4OB.OH$, ſerá $HQ = HB$, e conſeguintemente o angulo HBQ de 45°. Donde ſe vê, que ſe em todos os pontos da altura BC ſe abrirem orificios, todos os differentes repuxos por elles produzidos teraõ por tangente a recta que fórma com BC hum angulo de 45°.

373 Os repuxos obliquos naõ chegaõ taõ longe na pratica, como ſe acha pela theorica; porque ſaõ retardados pelas meſmas cauſas, que ponderámos a reſpeito dos verticais. Eisaqui duas experiencias, que fizemos ſobre a amplitude delles.

I Sendo o orificio O de 6 linhas de diametro, e a altura OB de 9 pés, a huma abſciſſa vertical OP de 4 pés, 3 pollegadas, e 7 linhas correſpondia huma ordenada horizontal PM de 11 pés, 3 pollegadas, e 3 linhas.

II E quando a altura OB era de 4 pés, a huma abſciſſa OP de 4 pés, 3 pollegadas, e 7 linhas correſpondia a ordenada PM de 8 pés, 2 pollegadas, e 8 linhas.

374 Daqui ſe vê, que as amplitudes effectivas ſaõ hum pouco menores que as theoricas; mas as primeiras ſaõ entre ſi ſenſivelmente na raſaõ ſubduplicada das alturas da reſerva, como as ultimas o ſaõ exactamente. Aſſim, conhecendo bem por huma experiencia immediata a amplitude effectiva, que correſponde a huma altura dada, por huma ſimples proporçaõ ſe achará a amplitude, que ha de ſer produzida por qualquer outra altura, ou reciprocamente; bem entendido, que as alturas das reſervas ſe ſuppoem medio-

mediocres. Quando eſtas forem muito conſideraveis, naõ ſe póde ſuppor que as curvas dos repuxos ſejaõ parabolas, nem taõ pouco que as amplitudes ſejaõ na raſaõ ſubduplicada das alturas das reſervas. Neſſe caſo as verdadeiras curvas ſaõ como indeterminaveis pela theorica; e ſeria neceſſario grande numero de experiencias, para chegar a conhecellas por approximaçaõ.

375 As dimenſoens dos conductores, que fornecem a agua para os repuxos obliquos, determinaõ-ſe do meſmo modo que nos verticais, como he por ſi meſmo evidente; porque debaixo de alturas iguais, e por orificios iguais, o producto delles he ſempre o meſmo, tanto nos repuxos obliquos como nos verticais.

376 Todos ſabem, que os regiſtos e fontes de repuxo contribuem muito para a decoraçaõ dos jardins, e dos edificios. A arte de os variar, e de os produzir em differentes figuras, que lizongeiem a viſta, eſtá muito adiantada. Tudo depende da altura das reſervas combinada com os orificios, guarnecidos de differentes bocais, configurados e ſituados da maneira conveniente ao fim que ſe propoem. Naõ he do noſſo aſſunto entrar por miudo neſte mechaniſmo, que mais pertence ao goſto da Architectura, do que á Hydraulica. Quem puder ver o parque de Verſalhes, os jardins de S. Cloud, de Chantilly &c, aprenderá couſas neſta parte, das quais naõ he poſſivel dar-ſe idéa clara em hum livro. Póde com tudo conſultar-ſe o que diz Belidor a eſſe reſpeito (*Archit. Hydraul. tom. 2. pag.* 389. *e ſeg.*).

CA-

CAPITULO IV.

Do movimento das aguas pelos tubos conductores.

NO Capitulo I diſſemos, como ſe ha de calcular a quantidade de licor, que produzem os tubos addicionais de pouco comprimento. Mas eſſe methodo naõ póde ſervir para os conductores, pelos quais ſe levaõ as aguas a lugares diſtantes; porque a fricçaõ repetida e accumulada por todo o ſeu comprimento produz hum effeito muito conſideravel. Agora examinaremos particularmente eſta materia, tomando a experiencia por guia; e primeiramente trataremos da quantidade de fluido que elles produzem em differentes circunſtancias, e depois da preſſaõ que o fluido exercita contra as paredes interiores delles.

Experiencias ſobre a quantidade de agua que produzem os tubos conductores.

377 OS conductores ſaõ ordinariamente curvilineos, e inclinados ao horizonte. Mas primeiramente conſideralloſ-hemos rectilineos, porque o exame deſte caſo, que he o mais ſimples de todos, dará maior clareza a eſta materia em geral, como depois ſe verá.

Havendo pois applicado á caixa de huma reſerva dous tubos de folha de flandes bem calibrados, dos quais hum tinha 16 linhas, e o outro 2 pollegadas de diametro, procurámos que a agua foſſe bem coada antes de entrar na reſerva, para que alguns corpuſculos eſtranhos naõ alteraſſem o movimento della dentro dos conductores. Além diſſo de eſpaço em eſpaço abrimos nos meſmos conductores alguns buracos pequenos, para facilitar a ſahida do ar interior, os quais depois ſe tapavaõ com cera. Aſſim, obſervando cada hum dos conductores por ſi, depois que o fluxo tinha adquirido toda a ſua plenitude, e dando a cadá hum delles differentes comprimentos de 30 até 180 pés, achámos os reſultados ſeguintes.

Altura conſtante da agua acima do eixo dos conductores.	Comprimento dos conductores.	Producto do conductor de 16 linhas de diametro.	Producto do conductor de 2 pollegadas de diametro.
Pés	*Pés*	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
1	30	2778	7680
1	60	1957	5564
1	90	1587	4534
1	120	1351	3944
1	150	1178	3486
1	180	1052	3119
2	30	4066	11219
2	60	2888	8190
2	90	2352	6812
2	120	2011	5885
2	150	1762	5232
2	180	1583	4710

378 Se buſcarmos os productos, que dariaõ dous pequenos tubos addicionais do meſmo calibre que os conductores precedentes, acharemos que debaixo de hum pé de altura o tubo de 16 linhas de diametro daria 6330, e o de 2 pollegadas 14243 pollegadas cubicas de agua; e que debaixo de 2 pés de altura o primeiro tubo daria 8939, e o ſegundo 20112 pollegadas cubicas de agua. Comparando eſtes reſultados com os da Taboa precedente, conheceremos de hum modo approximado a raſaõ em que diminue o producto dos conductores á medida que creſce o ſeu comprimento.

379 Aſſim veremos, que o producto de hum tubo de comprimento conſideravel he muito menor do que devia ſer, ſe a agua naõ encontraſſe reſiſtencia no attrito contra as paredes delle, mas conſervaſſe ſem alteraçaõ alguma a ſua velocidade inicial. Eſta reſiſtencia varia conforme o comprimento dos tubos, a materia de que ſaõ feitos, o modo com que ſaõ polidos, a ſua groſſura, e a altura das reſervas. Quando a altura da reſerva he a meſma, e os tubos da meſma groſſura, e materia, os produ-

productos diminuem á medida que elles saõ mais compridos. Alguns autores dizem, que a velocidade da agua diminue, conforme a ordem dos termos de huma progreſſaõ arithmetica, ſendo o primeiro delles a velocidade inicial com que a agua entra por huma extremidade do conductor, e o ultimo a velocidade com que ſahe pela outra. Aſſim havia de ſer, ſe todos os fios da columna fluida padeceſſem huma fricçaõ immediata contra as paredes do tubo, porque em tempos iguais encontrariaõ obſtaculos iguais, que lhes fariaõ perder gráos de velocidade tambem iguais. Mas ſomente os fios laterais encontraõ huma reſiſtencia immediata, os quais a communicaõ cadavez menor aos outros até o centro da columna; e por iſſo os fios laterais, e centrais naõ ſaõ retardados todos pela meſma lei.

380 As experiencias precedentes podem ſervir para determinar de hum modo approximado a lei, pela qual diminuem os productos dos conductores em raſaõ do ſeu comprimento. Porque tomando a recta AG (Fig. 111.) para repreſentar hum dos noſſos tubos, e dividindo-a em ſeis partes iguais AB, BC, CD, DE, EF, FG, ſupponhamos que os productos em A, B, C &c ſaõ repreſentados pelas ordenadas AH, BI, CK &c, e pelos pontos H, I, K &c façamos paſſar a curva $HIKLMNO$. Aſſim, ſendo os productos ligados entre ſi pela *Lei de continuidade*, que tem lugar em toda a natureza, qualquer ordenada PQ tomada de huma ou outra parte do ponto G, repreſentará o producto correſpondente ao ponto P.

381 Tomando pois huma abſciſſa qualquer $AP = x$, e a ſua ordenada $PQ = y$, ſupponhamos que a natureza da curva ſe exprime pela equaçaõ $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, que coincide ſenſivelmente com a verdadeira curva, quando os intervallos AB, BC ſaõ pequenos. Os coefficientes a, b, c &c ſe determinaráõ, obſervando que $x = 0$ dá $y = AH$, $x = AB$ dá $y = BI$ &c.

Por exemplo: Sendo AH, BI &c os productos que dá o conductor de 16 linhas de diametro debaixo de huma pé de altura, e tomando $AB = BC$ &c $= 1$, iſto he, tomando 30 pés por unidade de medida das abſciſſas, teremos eſtas ſete equaçõeſ do primeiro gráo.

$a = 6330$
$a + b + c + d + e + f + g = 2778$
$a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f + 64g = 1957$
$a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243f + 729g = 1587$
$a + 4b + 16c + 64d + 256e + 1024f + 4096g = 1351$
$a + 5b + 25c + 125d + 625e + 3125f + 15625g = 1178$
$a + 6b + 36c + 216d + 1296e + 7776f + 46656g = 1052$,

pelas quais ſe determinaráõ as quantidades a, b, c, d, e, f, g; e ſubſtituindo os ſeus valores na equaçaõ $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, por ella conheceremos o producto y, que correſponde a qualquer comprimento do tubo x.

382 Igualmente ſe póde achar x em y, ou pelo methodo inverſo das ſeries, ou conſtruindo huma curva, que tenha os y por abſciſſas, e os x por ordenadas. Mas eſtes calculos, ainda que muito faceis, e muito approximados, naõ ſaõ applicaveis á pratica ordinaria, na qual ſe requerem operações prontas, fundadas em regras, que ſe conſervem facilmente na memoria; ventagem, que muitas vezes ſe procura, deſprezando a exactidaõ rigoroſa nos meſmos caſos, em que ella ſe póde haver. Entaõ naõ há outro meio, ſenaõ o de recorrer a algumas experiencias, que naõ eſtejaõ longe do caſo propoſto, como abaixo moſtraremos.

383 Sendo a altura da reſerva conſtante, e os conductores da meſma materia, e de comprimentos iguais o de menor diametro dá ſenſivelmente menos á proporçaõ que o maior; porque relativamente á ſuperficie do orificio, pelo qual ſahe a agua, ha mais fricçaõ no primeiro que no ſegundo.

384 Quanto he maior a altura da reſerva a reſpeito do meſmo conductor, tanto he menor a diminuiçaõ que á proporçaõ ſe experimenta no producto; porque ſendo a fricçaõ proporcional á velocidade, ou á raiz quadrada da altura da reſerva, quanto maior for a altura, tanto ſerá menor á proporçaõ o effeito da meſma fricçaõ.

385 He facil de conceber, que o comprimento de hum conductor póde ſer tal, que a agua naõ tenha a força neceſſaria para vencer a fricçaõ, ou que o efluxo naõ ſe faça ſenaõ em muito tempo, e gota a gota. Aſſim o experimentámos com os dous tubos referidos, a 180 pés da reſerva, debaixo da altura de 16 linhas. Donde conclui-

cluiremos, que para haver hum deſaguamento ſenſivel, e continuo, he neceſſaria huma altura da reſerva, ou huma declividade do conductor de 20 linhas por 180 pés, ou de $\frac{2}{3}$ de linha por toeſa.

386 Quando os conductores ſaõ verticais, ou inclinados, a gravidade acceléra a velocidade do fluido que corre por elles. Da combinaçaõ deſta força com a preſſaõ da reſerva, e com a fricçaõ reſultaõ os effeitos, que agora examinaremos.

Seja *MR* (Fig. 112.) hum tubo cylindrico vertical, applicado ao fundo de huma reſerva *AD* conſtantemente cheia até a altura *MK*. He evidente, que ſendo a velocidade do fluido ao entrar por *MN* devida á altura *MK*, ſe cada particula foſſe hum corpo inſulado, e livre, ſujeito unicamente á acçaõ da gravidade, em chegando a qualquer ponto *Q* da vertical *MQ*, teria huma velocidade devida á altura *KQ*. Mas ligando as particulas humas com as outras em virtude da ſua viſcoſidade natural, em quanto formaõ huma columna continua que enche a capacidade do tubo, devem neceſſariamente mover-ſe ao longo do eſpaço *MQ* com a meſma velocidade. Logo, ſendo a velocidade produzida pela preſſaõ em *MN* ſempre a meſma, e recebendo cada particula tantas mais impreſsões da gravidade quanto mais ſe aparta de *MN*, he manifeſto que as particulas inferiores devem acceléRar as ſuperiores por huma acçaõ conſecutiva, para tomarem todas a meſma velocidade.

A maior parte dos Autores de Hydraulica pertendem que eſta acceleraçaõ ſe faz de maneira, que a velocidade em qualquer ponto *Q* ou *O* he ſempre como a raiz quadrada da altura correſpondente *KQ* ou *KO*. Iſto he ſenſivelmente verdadeiro, quando os tubos ſaõ pequenos, como acima diſſemos (n. 294.), porém naõ quando ſaõ de conſideravel comprimento, porque a adherencia reciproca das particulas, pela qual ſe communica a referida acceleraçaõ, tem ſeus limites, paſſados os quais ſe deſunem as particulas, ou começa a columna a eſtreitar-ſe até acabar em hum fio, ao qual he indifferente que o tubo ſeja ou naõ ſeja produzido para diante. Naõ he pois a aſſerçaõ exacta em geral; e muito menos, ſe at-

tendermos ao effeito da frieçaõ, como logo veremos.

387 O que temos dito dos tubos verticais, igualmente ſe applica aos inclinados (Fig. 113.). A velocidade inicial em *M N* he a meſma, ſendo as alturas das reſervas iguais; e pela theorica dos planos inclinados, a velocidade produzida pela gravidade no eſpaço *M R* he igual á que produziria pela vertical *O R*. Aſſim, ſendo o tubo *M I* pequeno, ſerá o producto do orificio em *I* proporcional á raiz quadrada da altura correſpondente *K I*. Mas, ſendo o tubo muito comprido, as meſmas raſões que alteraõ eſta lei nos tubos verticais, fazem tambem que naõ tenha lugar nos inclinados.

388 Como ſeria difficil o fazer as experiencias com tubos verticais muito compridos, tomamos o partido de ſervirnos de hum tubo inclinado por huma direcçaõ bem rectilinea *M R*, o qual tinha 16 linhas de diametro, e 177 pés de comprimento, ſendo dividido em tres partes iguais *M I*, *I G*, *G R* cada huma de 59 pés, e formando a hypothenuſa de hum triangulo rectangulo, a qual era para a altura *O R* como 2124 para 241.

Aſſim, conſervando ſempre a agua da reſerva *AD* na altura conſtante de 10 pollegadas acima do centro do orificio ſuperior do tubo *M N*, achámos 1º que no ponto *I* com o comprimento de 59 pés dava 5808 pollegadas cubicas em hum minuto. 2º que em *G* na diſtancia de 118 pés dava 5801 pollegadas cubicas tambem por minuto. 3º que em *R* na diſtancia de 177 pés dava 5795 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

389 Se foſſe hum tubo addicional de duas pollegadas de comprimento daria 5779 pollegadas cubicas em hum minuto (n. 301. 302.). Pelas experiencias precedentes ſe vê, que os productos ſaõ hum pouco maiores em cada ponto de diviſaõ; mas eſte exceſſo vai diminuindo á medida que o tubo he mais comprido; e he facil de ver, que os productos effectivos eſtaõ muito longe de ſerem na raſaõ ſubduplicada das alturas *K I*, *H G*, *L R*, iſto he, na raſaõ dos numeros 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

390. Diminuindo hum pouco o angulo *R M O*, os productos em *I*, *G*, *R*, chegariaõ mais para o producto junto á origem *M N*. Daqui vem huma obſervaçaõ, que póde ſer util na pratica. Qualquer que ſeja o comprimento de hum tubo ſemelhante ao precedente, dará ſenſivelmen-

te

te na extremidade o meſmo producto que daria na origem, quando a declividade OR for a oitava ou nona parte do comprimento MR, ou quando o angulo RMO for proximamente de 6° 31'; porque entaõ a fricçaõ deſtroe a velocidade que provém da acçaõ da gravidade ao longo do tubo. Eſta determinaçaõ talvez naõ terá lugar em todos os tubos, e em differentes alturas das reſervas. Mas por aqui ſe póde fazer idea da inclinaçaõ, que convem dar aos tubos, quando por eſſe meio ſe quizer compenſar a diminuiçaõ que reſulta do attrito.

391 A eſte reſpeito obſervámos tambem, que tapando o orificio QR, pelos furos n, p, q deſtinados a facilitar a ſahida do ar, ſe formavaõ repuxos que ſe elevavaõ até os pontos y, x, s conforme as leis explicadas no Capitulo precedente. Mas deſtapando o orificio QR, ſem tapar os referidos furos, os repuxos ceſſavaõ, e o deſaguamento por QR paſſados alguns ſegundos ſe fazia regular e permanente. Donde ſe vê, que a agua ceſſa entaõ de comprimir a parede ſuperior do tubo, e que a velocidade inſtantanea produzida pela gravidade relativa da columna $MNQR$ he igual, ao menos, á velocidade deſtruida a cada inſtante pela reſiſtencia da fricçaõ.

392 Paſſemos á conſideraçaõ dos conductores curvilineos; e comparando os productos delles com os dos tubos rectilineos, examinemos ſe a curvatura produz alguma diminuiçaõ na velocidade.

Para iſſo mandámos fazer de chumbo laminado de huma linha de groſſura hum tubo ON (Fig. 114.) de 50 pés de comprimento, e de huma pollegada de diametro interior bem calibrado. Na extremidade O ſoldámos outro tubo M de duas pollegadas de diametro, que communicava com a caixa da reſerva, e era guarnecido de hum regiſto R, furado interiormente de hum buraco de 18 linhas de diametro, por meio do qual ſe permittia, ou impedia o deſaguamento; e no tubo ON ſe tinhaõ aberto alguns furos E, F, G deſtinados a deixar ſahir o ar, que a agua traz ſempre comſigo. Iſto poſto obſervámos

I. Que poſto o tubo rectilineo ON horizontalmente, e conſervada a agua da reſerva na altura conſtante de 4 pollegadas acima do eixo TV, ſahiaõ pela extremidade N 576 pollegadas cubicas de agua em hum minuto.

II. Que conſervando o meſmo tubo na meſma poſiçaõ,

e dando á agua da reſerva a altura de hum pé acima do eixo *T V*, ſahiaõ por *N* 1050 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

III. Que encurvando o meſmo tubo, como ſe repreſenta nas fig. 115 e 116, e ſendo diſpoſto o plano da curva *O Q S Z X Y N* horizontalmente (Fig. 115.), e conſervando a agua da reſerva na altura conſtante de 4 pollegadas acima da linha *T V*, ſahiaõ por *N* 540 pollegadas cubicas em hum minuto.

IV. Que conſervando o meſmo tubo na meſma poſiçaõ, e dando á agua da reſerva a altura conſtante de hum pé, ſahiaõ por *N* 1030 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

V. Que diſpondo o plano do meſmo tubo verticalmente de maneira que a extremidade *N* ficaſſe na horizontal *T V*, e nenhum dos cotovelos ſe elevaſſe acima da meſma linha; conſervando a reſerva na altura de 4 pollegadas, e ſendo tapados os furos *E*, *F*, *G* &c; o ar do conductor embaraçava o movimento da agua, e naõ começou a apparecer em *N*, ſenaõ depois que ſe abriraõ huns pequenos furos nos cotovelos ſuperiores. E depois de bem eſtabelecido o deſaguamento, ſahiaõ por *N* 520 pollegadas cubicas de agua por minuto.

VI. Que conſervando o meſmo tubo na meſma poſiçaõ, e dando á agua da reſerva a altura de hum pé, ſahiaõ 1028 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

393 Comparando a experiencia I com a III, e a II com a IV, vemos que as ſinuoſidades horizontais diminuem o producto que daria o meſmo tubo ſe foſſe rectilineo. E porque a fricçaõ deve ſer ſenſivelmente a meſma em ambos os caſos, ſegue-ſe que a percuſſaõ da agua contra os angulos do tubo he a que faz diminuir a velocidade, e conſeguintemente o producto. He verdade, que ſe a curvatura foſſe perfeita, iſto he, ſe o angulo comprehendido por dous lados conſecutivos da curva differiſſe infinitamente pouco de 180°, o producto do conductor ſinuoſo deveria ſer o meſmo que o do rectilineo.

Porque ſupponhamos, que qualquer corpo corre pelo tubo curvilineo horizontal *O Q S Z N* (Fig. 117.) em virtude de hum impulſo primitivo recebido em *O*, e que em hum inſtante deſcreve o elemento da curva *Q q*. He manifeſto, que no inſtante ſeguinte deſcreveria *q r* igual

a Qq, e na meſma direcçaõ. Repreſentando pois por qr a velocidade com que ſe moveria, ſe foſſe livre, reſolva-ſe em duas, huma qf perpendicular á curva, a qual ſerá deſtruida, e a outra qb na direcçaõ do elemento conſecutivo, a qual ſe conſervará. Deſcrevendo do ponto q com o intervallo qb o pequeno arco bt, ſerá tr a diminuiçaõ inſtantanea da velocidade do movel. Porém, ſendo o angulo rqb infinitamente pequeno, he tb infinitamente pequeno em comparaçaõ de qt, e temos por outra parte $qt:tb::tb:tr$. Logo tr he infinitamente pequeno da ſegunda ordem a reſpeito de qt, e com mais raſaõ a reſpeito de qr. Logo naõ perde o movel em qualquer ponto q, ſenaõ huma parte infinitamente pequena da ſegunda ordem da ſua velocidade. Donde concluiremos, que no eſpaço finito $OQSZN$ naõ terá perdido, ſenaõ huma parte infinitamente pequena da primeira ordem da ſua velocidade inicial finita, e aſſim deverá dar o meſmo producto como ſe foſſe rectilineo.

Se pelas experiencias pois achamos differença ſenſivel entre eſtes productos, he porque a velocidade perdida em cada ponto q naõ he infinitamente pequena da ſegunda ordem, e conſeguintemente porque os angulos rqb naõ ſaõ infinitamente pequenos. A pezar de toda a diligencia que ſe ponha em ſuavizar as voltas de hum tubo, naõ ſe póde chegar a huma curvatura rigoroſa, e ſempre haverá diminuiçaõ ſenſivel no producto, procedida da alliſaõ do fluido contra os lados do polygono. Póde oppor-ſe, que encurvando o noſſo tubo fizemos eſtreitar alguma couſa o ſeu diametro; mas eſta alteraçaõ he muito pequena, para produzir toda a differença que achamos nos productos.

394 Comparando a experiencia I com a V, e a II com a VI, vemos tambem que as ſinuoſidades verticais fazem diminuir os productos. Iſto provém igualmente da imperfeiçaõ da curvatura. Porque as colunnas OQ e SQ, SZ e XZ, XY e NY (Fig. 116.), fazem equilibrio entre ſi duas a duas (n. 35.). Donde ſe ſegue, que preſcindindo de toda a reſiſtencia, a agua ſe moveria pelo conductor curvilineo $OQSZXYN$, como ſe elle foſſe rectilineo. Mas no primeiro caſo a alliſaõ da agua contra os cotovelos do tubo ſe ajunta á fricçaõ, e aſſim deve o producto ſer menor do que no ſegundo.

395 Co-

395 Comparando em fim a experiencia III com a V e a IV com a VI, achamos que as ſinuoſidades horizontais ſaõ menos nocivas ao movimento da agua do que as verticais. Eſta differença ſe entenderá, conſiderando que nas verticais he o movimento da agua compoſto de hum horizontal primitivo recebido em *O*, e de outro vertical da gravidade, que he acceleràdo nas partes *OQ*, *SZ*, *XY*, e retardado nas partes *SQ*, *XZ*, *NY*; e que da combinaçaõ delles com a reſiſtencia da fricçaõ, e das voltas do tubo, póde reſultar hum movimento differente do que tem lugar nas ſinuoſidades horizontais, onde naõ ha mais que a impulſaõ primitiva combinada com a fricçaõ, e com a percuſſaõ contra os lados do tubo. A figura do meſmo tubo deve influir alguma couſa neſte effeito.

396 Daqui reſponderemos a huma queſtaõ de pratica: *Havendo de conduzir-ſe agua de hum ponto para outro; ſeparados por montes e valles, pergunta-ſe qual he melhor: ſe conduzillas por hum plano vertical na direcçaõ do terreno, ou rodear os montes, na ſuppoſiçaõ de ſer igual o eſpaço corrido pela agua em ambos os caſos?* Para hum tubo ſemelhante ao noſſo, o ſegundo modo he mais ventajoſo, quando a altura da reſerva he pouco conſideravel, como ſe vê pelas experiencias III e V; mas quando a altura da reſerva naõ he menor que 1 pé, a ventagem deſvanece quaſi inteiramente, como ſe vê pelas experiencias IV e VI.

397 Nos conductores longos que tem ſubidas e deſcidas, póde o ar miſturado com a agua accumular-ſe nas partes eminentes, e embaraçar em todo ou em parte o movimento da agua. Por exemplo: no tubo *OMNQK* (Fig. 118.), cujo plano he vertical, correndo a agua de *O* para K, póde no fim de certo tempo encher-ſe de ar o eſpaço *DEN*, e impedir a paſſagem da agua. Para prevenir eſte inconveniente, he neceſſario ſoldar nas partes eminentes *N*, K &c huns canudos pequenos de chumbo, guarnecidos de regiſtos, que ſe fechaõ depois que o ar tem ſahido inteiramente, e o curſo da agua eſtá bem eſtabelecido.

398 M. Couplet (*Mem. de l' Acad.* 1732.) fez varias experiencias em grande ſobre eſta matéria, examinando os canos que conduzem as aguas a differentes lugares em Paris. Como podem ſervir de muito na pratica, ajuntallas-hemos com as que havemos referido na Taboa ſeguinte.

DIAMETROS, COMPRIMENTOS, E QUALIDADES DOS CONDUCTORES.	Alturas das reſervas acima do orificio da ſahida em pés e pollegadas.	Relaçaõ entre o producto effectivo, e o q teria lugar naõ havendo reſiſtencia.
Conductor de chumbo, rectilineo, horizontal, de 1 pollegada de diametro, e 50 pés de comprimento.	0 4	$\frac{1}{3,55}$
	1 0	$\frac{1}{3,18}$
O meſmo conductor, com muitas ſinuoſidades horizontais.	0 4	$\frac{1}{3,78}$
	1 0	$\frac{1}{3,43}$
O meſmo conductor, com as meſmas ſinuoſidades, mas poſtas verticalmente.	0 4	$\frac{1}{3,93}$
	1 0	$\frac{1}{3,44}$
Conductor de folha de flandes, rectilineo, horizontal, de 16 linhas de diametro, e 180 pés de comprimento.	1 0	$\frac{1}{6,01}$
	2 0	$\frac{1}{5,64}$
Conductor de folha de flandes, rectilineo, horizontal, de 2 pollegadas de diametro, e 180 pés de comprimento.	1 0	$\frac{1}{4,57}$
	2 0	$\frac{1}{4,27}$
Conductor da meſma materia, de 16 linhas de diametro, de 177 pés de comprimento, com a inclinaçaõ de $\frac{241}{2124}$ do ſeu comprimento.	20 11	$\frac{1}{5}$
O meſmo conductor, reduzido a 118 pés de comprimento.	13 $4\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
O meſmo conductor, reduzido a 59 pés de comprimento.	6 $8\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,82}$

DIAMETROS, COMPRIMENTOS, E QUALIDADES DOS CONDUCTORES.	Alturas das reſervas acima dos orificios da ſahida em pés e pollegadas.	Relaçaõ entre o producto effectivo, e o q teria lugar, naõ havendo reſiſtencia.
Conductor quaſi inteiramente de ferro, de 4 pollegadas de diametro, e de 297 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais, e verticais.	0 9	1/28,5
	1 9	1/26,53
	2 7	1/25,79
Conductor da meſma materia, de 6 pollegadas de diametro, e 285 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais e verticais.	0 3	1/12,35
	0 5 1/4	1/11,37
Conductor parte de barro, parte de chumbo, de 5 pollegadas de diametro, e 1170 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais e verticais.	0 5 7/12	1/23,10
	0 11 1/3	1/20,98
	1 4 3/4	1/19,49
	1 9 1/12	1/18,78
	2 1	1/18,46
Conductor de ferro de 1 pé de diametro, e 600 toeſas de comprimento, com ſinuoſidades horizontais e verticais.	12 1 1/4	1/10,08
Conductor de ferro de 18 pollegadas de diametro, e 600 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais e verticais.	12 1 1/4	1/6,05
Conductor de ferro de 18 pollegadas de diametro, e 790 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais e verticais.	4 7 1/2	1/10,11
Conductor de ferro de 1 pé de diametro, e 2340 toeſas de comprimento, com muitas ſinuoſidades horizontais e verticais.	20 3	1/19,34

399 Eſta Taboa offerece muitos termos de comparaçaõ entre os productos effectivos e os que teriaõ lugar, ſe naõ foſſe a reſiſtencia da fricçaõ e da figura dos conductores, conforme os comprimentos e diametros delles, e as alturas das reſervas. Quando pois ſe quizer conduzir a agua de huma reſerva para hum ponto diſtante, e mais baixo que ella, procurar-ſe-ha na Taboa o caſo mais analogo ao propoſto, e aſſim ſe determinaráõ proximamente as dimenſoens que convem ao conductor. Expliquemos iſto com hum exemplo.

400 Seja *ADCB* huma mãi d'agua (Fig. 119.), que recebe 40000 pollegadas cubicas de agua por minuto, a qual ſe ha de conduzir pelo cano *GEDO* para o ponto *O*. Supponhamos, que a maior altura *AH* ou *FO* da agua da reſerva acima do orificio *O* he de 4 pés; que o cano, attendidas as circunſtancias do terreno, deve ſer de 400 toeſas; e que ſe haõ de ſuavizar quanto for poſſivel as ſinuoſidades. Iſto poſto, pergunta-ſe o diametro que deve ter, para conduzir ao ponto *O* toda a agua que entra na reſerva.

Primeiramente acharemos, que para hum tubo addicional de poucas pollegadas dar neſte caſo em hum minuto 40000 pollegadas cubicas de agua devia ter 28, 54 linhas de diametro (n. 303.). Mas como o conductor *GEDO* ha de ter 400 toeſas de comprido, pela Taboa precedente ſe vê, que no caſo de naõ ſe lhe dar maior diametro, ſómente produziria a oitava ou nona parte da agua que convinha. Supponhamos pois, que tendo o conductor propoſto 28, 54 linhas de diametro dá 5000 pollegadas cubicas por minuto ſómente; e imaginemos que a carga ou preſſaõ total *AH* ou *FO* he compoſta de duas partes, huma *AN* ou *FQ* que faria paſſar 5000 pollegadas cubicas de agua por hum tubo de 28, 54 linhas de diametro izento de fricçaõ, e a outra *NH* ou *QO* que he empregada em vencer a reſiſtencia da fricçaõ. Entaõ buſcaremos o diametro que deveria ter outro tubo izento tambem de fricçaõ, para que debaixo da altura FQ ou *AN* déſſe 40000 pollegadas cubicas de agua por minuto, e acharemos que ſeria de 80, 73 linhas. Donde ſe vê, que ſe a reſiſtencia da fricçaõ em dous tubos igualmente compridos de 28, 54 e 80, 73 linhas de diametros, foſſe repreſentada pela carga *NH*, o conductor propoſto *GEDO* deveria ter 80, 73 linhas de diametro. Mas a reſiſten-

a reſiſtencia he hum pouco menor á proporçaõ no tubo de maior diametro (n.383.). Sem embargo a differença naõ deve aqui ſer muito ſenſivel, e poderemos ſem erro notavel dar ao conductor o diametro de 6 pollegadas e 8 linhas.

Todos eſtes calculos ſaõ admiſſiveis na pratica, em falta de methodos exactos; e ſervem para ſe evitar, ao menos em grande parte, o acaſo de fazer o conductor muito eſtreito relativamente ao producto que deve dar, ou demaſiadamente largo com deſpeza ſuperflua. Mas ſerá bem tomar no calculo a altura da reſerva hum pouco menor do que ella póde ſer, porque ſuccedendo determinar-ſe o diametro do condúctor alguma couſa menor do que convem, tenha a agua lugar para ſe levantar na reſerva, e com a maior altura fazer deſaguar ſempre pelo conductor toda a quantidade que ſe pertende.

Da preſſaõ que a agua em movimento exercita contra as paredes dos conductores.

401 SEja hum tubo cylindrico horizontal *EN* (Fig. 120.) applicado á reſerva *ADCB* conſtantemente cheia até *EB*; e ſupponhamos que a agua ſe move livremente ſem experimentar reſiſtencia alguma. He certo, que exceptuando a preſſaõ que naſce do pezo da colunna de agua *EN*, o tubo naõ experimentará força alguma; porque tendo a velocidade da agua huma direcçaõ livre e horizontal, naõ póde reſultar della força alguma contra as paredes do tubo.

402 Iſto ſe confirma pela experiencia. Porque tendo o tubo horizontal *EN* 3 pés de comprido, e 9 até 10 linhas de diametro, e podendo andar em roda para que o pequeno furo *M* aberto no meio delle ſe pudeſſe virar para cima, para baixo, e para os lados; obſervámos, que tapando a extremidade *N*, e conſervando a reſerva na altura de 4 pés acima do tubo, ſahia por *M* hum repuxo, que tinha a altura, ou amplitude determinada no Capitulo precedente. Mas deſtapando o orificio *N* ceſſava inteiramente o repuxo, e ſomente quando o furo *M* eſtava para baixo deſtillava alguma couſa pelas bordas delle,

delle. He manifeſto, que a ceſſaçaõ do repuxo demonſtra huma ceſſaçaõ de preſſaõ contra as paredes do tubo.

403 Imaginando ſempre hum tubo horizontal EN (Fig. 121.) applicado a huma grande reſerva $ADCB$, no qual a agua ſe mova ſem experimentar a reſiſtencia da fricçaõ, ſupponhamos que eſtá tapada huma parte da extremidade PN, e que a agua ſahe pelo pequeno orificio pn. Entaõ, ſerá a velocidade de qualquer ſecçaõ vertical da columna do tubo GF para a velocidade da ſecçaõ da veia contrahida qr, como a area da ſecçaõ qr para a da ſecçaõ GF. E porque a velocidade em qr he devida á altura BH, fazendo $BH = b$, o diametro do tubo $= D$, o do orificio contrahido $qr = d$, teremos a velocidade do fluido ao longo do tubo EN repreſentada por $\frac{d^2\sqrt{b}}{D^2}$. Porém cada ponto da camada, que a cada inſtante cobre o fundo PN, tende a mover-ſe com a velocidade $\sqrt{b}$, e realmente naõ ſe move ſenaõ com a velocidade $\frac{d^2\sqrt{b}}{D^2}$; logo deve evidentemente comprimir cada hum dos pontos de Pp ou Nn com huma força igual á differença das preſſões que produzem as velocidades $\sqrt{b}$ e $\frac{d^2\sqrt{b}}{D^2}$. Eſta preſſaõ ſe diſtribue igualmente a todos os pontos da maſſa EN, a qual actúa conſeguintemente contra as paredes do tubo, como ſe eſtiveſſe comprimida por huma columna de agua que tiveſſe a altura $= b - \frac{d^4 b}{D^4}$.

404 Daqui ſe ſegue, que abrindo no tubo EN hum buraco muito pequeno em comparaçaõ dos orificios PN, pn, a agua ſahirá por elle com huma velocidade devida á altura $b - \frac{d^4 b}{D^4}$. Eſta altura deſvanece quando $d = D$, como já temos viſto (n. 402.); e aſſim fica manifeſto, quanto ſe enganaõ os praticos que julgaõ, que abrindo huma pequena abertura lateral em hum tubo pelo qual corre agua, deve ſahir hum repuxo, que fazendo abſtracçaõ da fricçaõ e da reſiſtencia do ar ſe levante á altura devida á velocidade da agua ao longo do tubo. He tanto

tanto pelo contrario, que ha caſos em que pela dita abertura naõ ſahirá agua nenhuma.

405 Nos caſos em que ſahe a agua pelo pequeno orificio lateral, he facil de calcular o ſeu producto em hum tempo dado. Porque ſendo os productos de hum orificio no meſmo tempo na rafaõ ſubduplicada das alturas das reſervas, e ſendo Q a quantidade de agua que daria o orificio no tempo dado debaixo da altura b, e q a quantidade actual que produz, teremos $Q : q :: \sqrt{b} : \sqrt{\left(b - \frac{d^4 b}{D^4}\right)}$, e $q = \frac{Q}{D^2}\sqrt{\left(D^4 - d^4\right)}$. Aſſim, determinando Q pelo nº 302, immediatamente viremos no conhecimento de q.

406. Eſta theorica igualmente tem lugar nos tubos inclinados, com tanto porém que a abertura $p\,n$ ſeja muito pequena em comparaçaõ de PN. Se eſta condiçaõ naõ tiveſſe lugar, naõ ſeria entaõ a velocidade ao ſahir de $p\,n$ devida a toda a altura da reſerva; e ſeria neceſſario começar pela determinaçaõ de b por principios differentes dos que havemos empregado.

407 A meſma theorica póde ſervir para determinar, ao menos proximamente, as eſpeſſuras que devem ter os conductores guarnecidos de bocais eſtreitos nas extremidades, para reſiſtirem á preſſaõ da agua que conduzem. Porque ſendo a preſſaõ, que ſofre cada ponto da circumferencia de qualquer ſecçaõ do noſſo tubo EN repreſentada por $b - \frac{d^4 b}{D^4}$, he evidente que para ſuſtentar eſta preſſaõ deve ter a groſſura, que ſeria neceſſaria para reſiſtir á preſſaõ de huma agua eſtagnada debaixo da altura $b - \frac{d^4 b}{D^4}$; e a queſtaõ ſe reſolverá como no n.º 54.

408 Na pratica fazem-ſe ſempre os tubos mais fortes do que ſe acharia pela theorica precedente, para reſiſtirem a muitos accidentes, de que no calculo ſe naõ faz conta. Eiſaqui as groſſuras, que ordinariamente ſe daõ aos tubos de chumbo, e de ferro, relativamente aos ſeus diametros, ou tenhaõ bocais nas extremidades, ou naõ.

Tubos de chumbo		*Tubos de ferro*	
Diametros em pollegadas	Eſpeſſuras em linhas	Diametros em pollegadas	Eſpeſſuras em linhas
1	2,5	1	1
1,5	3	2	3
2	4	4	4
3	5	6	5
4,5	6	8	6
6	7	10	7
7	8	12	8

O pezo deſtes tubos he ſempre facil de ſe achar, tendo na lembrança que o pé cubico de chumbo peza 828 libras, e o de ferro 580 proximamente. Para os canos de páo e de barro, naõ ha regra fixa.

409 Supponhamos agora, que a agua ſe move pelo tubo horizontal *EN* (Fig. 120.) ſujeita á reſiſtencia da fricçaõ, eſtando a extremidade *N* toda aberta. Imaginando, que a fricçaõ contrahe a columna fluida ao ſahir por *N*, parece que poderemos determinar a preſſaõ lateral do tubo pela formula do n.º 403, ſubſtituindo o tubo da Fig. 121 em que ſe naõ ſuppoem fricçaõ ao da Fig. 120 em que ſe ſuppoem, e entendendo que *D* repreſenta o diametro verdadeiro do tubo, e *d* o diametro reduzido e contrahido pela fricçaõ. Mas conſultemos ſobre iſſo a experiencia.

410 Servindonos do conductor de 16 linhas de diametro, de que já fizemos menção (n. 377), abrimoſ-lhe hum orificio lateral de $3\frac{1}{4}$ linhas de diametro, e obſervámos a agua que dava por elle em hum minuto, debaixo de differentes alturas da reſerva, e dando ao conductor differentes comprimentos, como aqui ſe moſtra.

Compri-

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo da altura de 1 pé	Productos do meſmo orificio debaixo da altura de 2 pés
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	171	240
60	186	256
90	190	261
120	191	264
150	193	265
180	194	266

Obſervámos tambem, que tapando a extremidade do conductor debaixo da altura de 1 pé ſahiaõ pelo orificio lateral 196 pollegadas cubicas de agua; e debaixo da altura de 2 pés, 274.

411 Agora, em virtude da ſuppoſiçaõ precedente (n. 409.), repreſentando d o diametro pelo qual a agua ſe julga ſahir na extremidade do tubo, e D o diametro verdadeiro do meſmo tubo, corrigido ſomente em quanto á contracçaõ ordinaria da veia; eſtá claro, que ſerá o producto na extremidade do tubo alterado pela fricçaõ para o que teria lugar naõ havendo fricçaõ, como d^2 para D^2. Aſſim, pelo que acima temos viſto (n. 377. 378.), na origem do tubo quando a reſerva eſtá em hum pé de altura, ſerá $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ou $d = D$, a 30 pés da reſerva $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2778}{6330}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1957}{6330}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1587}{6330}$; a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1351}{6330}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1178}{6330}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1052}{6330}$. Do meſmo modo, quando a reſerva eſtá em 2 pés de altura, ſerá na origem do tubo $\frac{d^2}{D^2} =$

1,

ou $d = D$, a 30 pés de comprimento $\frac{d^2}{D^2} = \frac{4066}{8939}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2888}{8939}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2352}{8939}$, a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2011}{8939}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1762}{8939}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1583}{8939}$.

412 Iſto poſto, na formula $q = \frac{Q}{D^2}\sqrt{(D^4 - d^4)}$ (n. 405.), ou $q = Q\sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$, quando a altura da reſerva he de 1 pé temos $Q = 196$; e quando a altura he de 2 pés, $Q = 274$. Subſtituindo pois os valores de $\frac{d^2}{D^2}$ que acabamos de determinar em ambos os caſos, acharemos os productos do orificio lateral, como ſe moſtraõ na Taboa ſeguinte, os quais ſaõ taõ concordes com os obſervados, que naõ he poſſivel eſperar mais exactidaõ em ſemelhantes indagações.

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo de 1 pé de altura	Productos do meſmo orifico debaixo de 2 pés de altura
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	176	244
60	186	259
90	190	264
120	191	267
150	192	268
180	193	269

413 Daqui ſe ſegue hum meio ſimples de determinar o producto de hum tubo longo horizontal pelo producto de hum orificio lateral. Seja x a raſaõ entre o producto effectivo do tubo e o que daria naõ havendo fricçaõ; iſto he, $x = \frac{d^2}{D^2}$; e a formula $q = Q\sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$ ſe redu-

zirá

zirá a $q = Q\sqrt{(1 - xx)}$, donde ſe tira $x = \sqrt{(1 - \frac{q^2}{Q^2})}$.

Supponhamos, por exemplo, que o conductor tem 2 pollegadas de diametro, e que a reſerva tem 3 pés de altura acima do eixo delle; que em qualquer ponto das paredes do meſmo tubo ſe abrio hum orificio lateral de 6 linhas de diametro, e que eſte dá 1000 pollegadas cubicas de agua por minuto, correndo a agua pelo conductor. Se a extremidade do conductor eſtiveſſe tapada, acharemos, que o meſmo orificio lateral deveria produzir 1178 pollegadas cubicas em hum minuto (n. 302.). Aſſim temos $Q = 1178$, $q = 1000$; e conſeguintemente ſerá $x = 0,5289$. Porém o conductor deveria dar pela ſua extremidade, ſe naõ foſſe a fricçaõ, 24504 pollegadas cubicas por minuto (n. 301. 302.). Logo ſerá o producto effectivo $= 24504 \times 0,5289 = 12952$ pollegadas cubicas.

Tudo iſto he applicavel aos tubos inclinados rectilineos, ou curvilineos, quando ſe póde julgar que a fricçaõ diminue conſideravelmente o orificio da ſahida. Mas he neceſſario advertir, que o orificio lateral deve abrir-ſe bem perpendicularmente á parede do tubo; porque naõ ſendo aſſim, o producto delle naõ ſeria ſómente effeito da preſſaõ do fluido contra as paredes do tubo, mas tambem do movimento do meſmo fluido ao longo do conductor, como he facil de entender reparando na abertura lateral M do conductor AMB (Fig. 122.).

CAPITULO V.

Do movimento das aguas conduzidas por quaiſquer canais.

414 OS canais, de que agora tratamos, ſaõ abertos pela parte ſuperior, e daõ á ſuperficie da agua a liberdade de ſe levantar, ou abaixar dentro delles. Em virtude deſta liberdade póde o fluido tirar do ſeu proprio pezo huma velocidade, que ſe combina com a que lhe reſta do impulſo inicial; e a fricçaõ naõ póde ſeguir exactamente as meſmas leis, que nos tubos conductores, em que a agua he comprimida de todos

os

os lados. Muito he o que ſe tem eſcrito ſobre eſta materia, na qual primeiro exporemos as noſſas indagações, e depois referiremos os meios principais, que diverſos Autores tem propoſto, para medir a velocidade das aguas correntes.

Experiencias, e reflexões ſobre a velocidade da agua em canaes rectangulares.

415 QUando hum fluido paſſa de huma reſerva para hum canal por huma abertura que naõ he muito grande, cada molecula tende a mover-ſe ao primeiro inſtante com a velocidade devida á altura da reſerva; e ſe foſſe hum corpo ſolitario e livremente movel pelo canal, conſervaria eſta velocidade inicial ao longo delle, e além diſſo adquiriria outra pela acçaõ da gravidade, no caſo de ſer o canal inclinado. Mas a cada inſtante ſahe pela abertura huma maſſa de moleculas, que obraõ humas contra as outras, e alteraõ os ſeus movimentos reciprocos. A veia he ſujeita á contracçaõ, á fricçaõ, e á reſiſtencia do ar. Todas eſtas cauſas influem ſobre a velocidade, a qual he difficil de ſe determinar exactamente, quando o canal he de figura irregular, como abaixo ſe verá.

416 Para chegarmos pois a reſultados ſimples, e facilmente comparaveis com a theorica, obſervámos o movimento da agua por hum canal rectangular *E F* de 105 pés de comprido, e aberto por cima (Fig. 123.), cujo fundo era de 5 pollegadas, e a altura de 8 até 9. Eſte canal eſtava applicado á face vertical *BC* da reſerva *ADCB*, na qual ſe tinha praticado huma abertura *E C* na direcçaõ das paredes do canal, guarnecida de huma aduſa rectangular de cobre, a qual ſe levantava e abaixava conforme era preciſo. Deſte modo, o orificio por onde ſahia a agua para o canal era hum rectangulo, que tinha conſtantemente a baſe horizontal de 5 pollegadas ao livel do fundo da reſerva, e a altura maior ou menor, conforme ſe levantava mais ou menos a aduſa.

Dividindo o canal em 5 partes de 21 pés cada huma, procuramos examinar a velocidade da agua por meio de pequenos fragmentos de cortiça; mas logo conhece-

mos a inſufficiencia deſte methodo, ao menos quando o canal eſtava ſituado horizontalmente. Porque entaõ a agua ſe entumece á medida que vai caminhando; e lançando o pequeno corpo fluctuante para hum e outro lado, naõ o deixa ſeguir direitamente o fio da corrente. Recorremos ao meio de lançar na agua materias coloradas, como ſangue, carvaõ pilado &c; mas tambem o achámos defeituoſo, porque a agua diſſolvia facilmente eſtas materias, e aſſim havia incerteza na chegada dellas a qualquer ponto das diviſões. Em fim reduzimonos a obſervar os tempos, que gaſtava a agua em chegar a cada huma das diviſões, deſde o inſtante em que ſe levantava a adufa; e para iſſo em cada hum dos ditos pontos collocamos huns molinetes pequenos, ſummamente moveis, que indicavaõ pelo ſeu movimento a chegada inſtantanea da agua. He verdade, que deſte modo achámos ſomente a primeira velocidade da agua no canal, e que depois de ſer a corrente perfeitamente eſtabelecida deve a velocidade ſer maior. Mas ambas tem entre ſi huma raſaõ conſtante, ao menos ſenſivelmente, como veremos depois em muitos caſos, em que huma e outra ſe podem determinar pela experiencia. Aſſim, ſendo determinada eſta raſaõ, pela primeira velocidade ſe poderá conhecer a velocidade permanente.

Por eſte meio pois, eſtando o canal horizontal achámos os reſultados ſeguintes, nos quais a *elevaçaõ da adufa de meia pollegada, ou de huma pollegada* quer dizer que o orificio era hum rectangulo de 5 pollegadas de baſe, e de meia ou huma pollegada de altura; e o final + ou − adiante dos ſegundos indica que no numero delles falta ou abunda huma pequena parte da unidade.

Altu-

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés e pollegadas	Elevaçaõ da adufa de meia pollegada		Elevaçaõ da adufa de huma pollegada	
	Segundos	*Numero dos pés corridos*	*Segundos*	*Numero dos pés corridos*
3 8	3 +	21	3 −	21
	9 +	42	6 +	42
	17 +	63	11 +	63
	27 +	84	18 +	84
	38 +	105	26	105
7 8	3 −	21	2 +	21
	7	42	5	42
	13 −	63	9	63
	20 −	84	14	84
	28 +	105	20	105
11 8	2	21	2	21
	5 −	42	4	42
	10 −	63	7	63
	16 −	84	11	84
	23 +	105	16 +	105

417 Se diminuirmos cada hum dos termos deſtas experiencias do que ſe ſegue immediatamente, acharemos que em todas ellas os eſpaços conſecutivos de 21 pés cada hum, ſaõ corridos em tempos, que formaõ ſenſivelmente huma progreſſaõ arithmetica. Aſſim póde facilmente continuar-ſe a ſerie, e determinar-ſe, ao menos proximamente, o tempo que a agua gaſtaria em correr qualquer numero de pés, ſe o canal foſſe produzido em cada hum dos caſos.

418 Para conhecermos o effeito da fricçaõ, calcularemos a velocidade que deveria ter lugar, preſcindindo da meſma fricçaõ. O fluido ao ſahir do orificio rectangular padece huma contracçaõ, e depois ſeguindo o fundo e as paredes do canal torna-ſe a dilatar ſenſivelmente quanto ſe tinha contrahido. E porque no meſmo tempo paſſa igual quantidade de agua pela ſecçaõ da veia contrahida e por qualquer ſecçaõ do canal, as velocidades correſpondentes neſ-

tes dous lugares ſeráõ na raſaõ de 8 para 5 proximamente. Aſſim deſignando por H a altura da reſerva, que lhe a devida á velocidade no ponto da contracçaõ, e por b a altura devida á velocidade da corrente no reſto do canal, teremos $\sqrt{H} : \sqrt{b} :: 8 : 5$, e $\sqrt{b} = \frac{5\sqrt{H}}{8}$.

419 Como hum grave cahe em 1 ſegundo da altura de 15 pés, e adquire huma velocidade, com a qual andaria uniformemente 30 pés no meſmo tempo, ſe deſignarmos por E o eſpaço corrido uniformemente por qualquer movel no tempo t com huma velocidade devida á altura b, ſerá $t : 1'' :: \frac{E}{\sqrt{b}} : \frac{30}{\sqrt{15}}$, e $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15b}}$. Suppondo pois, que E he o eſpaço corrido pelo fluido no canal, e metendo por $\sqrt{b}$ o ſeu valor $\frac{5\sqrt{H}}{8}$, teremos $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$.

420 Da formula geral $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15b}}$ ſe tira $b = \frac{E^2}{60t^2}$. Donde ſe vê, que ſe hum eſpaço E contado em pés for corrido uniformemente em hum tempo t contado em ſegundos, a altura devida á velocidade do movel ſerá repreſentada por $\frac{E^2}{60t^2}$.

421 Buſcando pois pela formula do nº 419 o tempo que a agua deveria gaſtar em correr todo o canal, ſe naõ encontraſſe reſiſtencia, acharemos para a altura da reſerva de 3 pés e 8 pollegadas $t = 11'', 33$; para a altura de 7 pés e 8 pollegadas, $t = 7'', 83$; e para a altura de 11 pés e 8 pollegadas, $t = 6'', 35$. Donde ſe vê, que a reſiſtencia produz hum effeito muito conſideravel, o qual ſe deve attribuir quaſi todo á fricçaõ, porque o ar influe niſſo muito pouco. Pelas meſmas experiencias ſe vê, que eſtando a adufa mais levantada he menor o effeito da fricçaõ, porque entaõ a maior maſſa tem mais forças que a mais pequena para vencer os obſtaculos, ſendo ambas animadas de velocidades iguais,

422 Igualmente ſe manifeſta por cada huma das experiencias, que a velocidade diminue á medida que a agua ſe aparta da reſerva; e eſte movimento tem algumas particularidades, que merecem ſer obſervadas. Quando ſe levanta a adufa, a agua ſahe primeiramente pela direcçaõ do canal; mas como no caminho encontra obſtaculos, começa a entumecer-ſe, e a ſuperficie toma a fórma *EMG* (Fig. 124.). Entaõ do ponto mais elevado *M* começa a cahir em virtude da gravidade, e parte della torna para a banda da reſerva pela direcçaõ *MN*, formando-ſe na parte *CM* do canal duas correntes contrarias, huma da agua inferior pela direcçaõ *CF*, e a outra da ſuperior pela direcçaõ *MN*. Eſta he muito ſenſivel no principio, e termina-ſe no ponto *N* diſtante do orificio 12 pés com pouca differença. Ao depois diminue pouco a pouco, ainda que ſubſiſtindo ſempre; e a ſuperficie acaba tomando a fórma *ERG*, em que o ponto *R* he o mais elevado acima do fundo. A agua que chega a cada inſtante a *NO* fére continuamente a maſſa *NOFG*, e miſtura-ſe com ella, a qual renovando-ſe ſucceſſivamente conſerva a meſma figura permanente a que ſe reduzio. Eſtas correntes ſaõ hum exemplo ſenſivel das que devem formar-ſe nos rios, e no mar, quando a agua he retardada por alguns obſtaculos.

423 He de notar que o deſaguamento do orificio naõ he retardado pela agua do canal, porque eſta tendo a liberdade de eſcapar ou de ſe elevar, naõ póde oppôr á que vem atraz della ſe naõ huma reſiſtencia infinitamente pequena. Iſto he evidente, mas ſem embargo fizemos a experiencia; e achamos, que em hum tempo dado ſe recebia na extremidade *F* a meſma quantidade de agua, que dava no meſmo tempo o orificio *EC* quando ſe tinha tirado o canal. Donde ſe vê, que ha huma differença muito grande entre o movimento da agua por hum canal, e por hum conductor fechado de todos os lados.

424 Os canais declives, ſendo a velocidade inicial a meſma, ſaõ corridos pela agua em menos tempo que os horizontais, porque a gravidade acceléra entaõ o movimento. As experiencias ſeguintes moſtraráõ a lei das velocidades neſſe caſo. Por *declividade* do canal entendemos a diſtancia de huma das ſuas extremidades á linha horizontal que paſſa pela outra.

Sen-

Sendo a adufa elevada $\frac{1}{2}$ *pollegada.*

Altura conſtante da reſerva acima do fundo em pés e pollegadas.	Declividade de 3 pollegadas.		Declividade de 6 pollegadas.	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	6 +	35	6	35
	18 +	70	18 —	70
	34 +	105	31 +	105
7 8	4 +	35	4 +	35
	14 +	70	14	70
	26	105	25 +	105
11 8	4	35	3, 5	35
	11 +	70	11, 5	70
	22	105	21	105

Sendo a adufa elevada 1 *pollegada*

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés e pollegadas.	Declividade de 6 pollegadas.		Declividade de 2 pés	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	5 —	35	4, 5	35
	13 —	70	10, 5	70
	23 —	105	17, 5	105
7 8	4 —	35	4 —	35
	9 +	70	9 —	70
	19 —	105	15 —	105
11 8	3	35	2 +	35
	8	70	7	70
	15	105	13	104

425 Neſtas experiencias naõ ſe trata, ſenaõ da primeira agua, que corre o canal. Eſta padece maior fricçaõ, porque topa nas prominencias e aſperezas do fundo e das paredes; mas enchendo as cavidades aplaina o caminho para a agua ſeguinte, a qual por eſſa raſaõ deve ter maior velocidade, aſſim que a corrente for bem eſtabelecida. Para a medirmos, uſamos de pequenos corpos fluctuantes, que ſeguiaõ exactamente a corrente, e que tomavaõ ſenſivelmente a ſua velocidade, quando o canal era ſufficientemente declive. Aſſim, ſendo a declividade de 10 pés e 6 pollegadas, achamos para o canal inteiro os reſultados ſeguintes

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés e pollegadas.	*Elevaçaõ da aduſa de meia pollegada.*		*Elevaçaõ da aduſa de 1 pollegada.*	
	Tempo da primeira agua em meios ſegundos.	Tempo da corrente eſtabelecida em meios ſegundos.	Tempo da primeira agua em meios ſegundos.	Tempo da corrente eſtabelecida em meios ſegundos.
3 8	28, 5	25	22, 7	19
7 8	24	21	19, 5	16
11 8	22	19	17, 5	14, 5

426 Eſtas experiencias foraõ feitas em 1764, e incorporadas em huma Memoria que enviei á Academia de Toloſa, e que conſeguio em 1765 o premio deſtinado á indagaçaõ das leis da fricçaõ dos fluidos em movimento. Eiſaqui outras experiencias, que fizemos depois em hum canal de 600 pés de comprido, o qual eſtava dividido em 6 partes iguais, e tinha por declividade $\frac{1}{10}$ da linha de livel.

Altu-

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés.	Numero dos pes corridos.	Elevaçaõ da adufa de 1 pollegada		Elevaçaõ da adufa de 2 pollegadas	
		Tempo da primeira agua.	Tempo da corrente eſtabelecida.	Tempo da primeira agua.	Tempo da corrente eſtabelecida.
	100	15″	13″	13″,5	11″,5
1/3	200	31	26,5	26,7	23
	300	47	39,5	39,5	33,5
	100	12 +	12	11 −	9
1	200	25,5	23 +	22	18 −
	300	39	33	32,5	27
	100	11	10	9	8 −
	200	23	20	19	16
	300	35	30	29	24
2	400	46 +	40	39	32
	500	58	49	49	40
	600	69	58	58	48
	100	10	8	8	7
	200	20 +	17	17	14,5
	300	31 −	26	26	22
4	400	42 −	35	35 −	29 +
	500	52,5	43 +	43 +	37 −
	600	62 +	52	52 −	44 +

427 Por eſtas experiencias ſe vê em geral, que a velocidade creſce á medida que ſe aumenta a declividade. Comparando as velocidades da primeira agua com as da corrente eſtabelecida, tambem ſe vê, que ſaõ entre ſi ſenſivelmente em raſaõ conſtante, para o meſmo canal; e a raſaõ he, porque ſendo as aſperezas do canal as meſmas, a agua encontra os meſmos obſtaculos, e deve eſtabelecer a corrente ſenſivelmente do meſmo modo, ainda que a altura do orificio, e a velocidade do canal venhaõ a variar. Mas póde ſucceder, que as velocidades primitivas em differentes canais naõ ſejaõ entre ſi como as velocidades permanentes, porque a frioçaõ póde ſer differente em ambos os caſos.

428 Quando o canal he pouco declive, nem a velocidade primitiva, nem a permanente he uniforme, mas

á

á medida que a agua ſe aparta da reſerva, as partes iguais do canal ſaõ corridas em mais tempo. No noſſo canal achamos, que huma e outra velocidade naõ ſe fazia ſenſivelmente uniforme, ſenaõ quando a declividade era ao menos huma decima parte do comprimento delle; exceptuando a primeira diviſaõ, que ainda entaõ era corrida em tempo hum pouco menor do que as outras.

429 Huma das queſtões para examinar, he ſaber em que raſaõ variaõ as velocidades, quando varia a declividade do canal, ficando o orificio conſtante. Seja EF o canal inclinado (Fig. 125.), EN a altura devida á velocidade que a agua deveria ter no canal, em virtude do impulſo inicial, e adiante do ponto de contracçaõ. Conduzindo as horizontais EO, NK que encontrem em O, K a vertical GK, a parte OG he a declividade do canal; e imaginando eſte produzido até V, a velocidade da agua ſerá como ſe tiveſſe deſcido pela parte VE, naõ experimentando nella fricçaõ, nem reſiſtencia alguma. Aſſim ſe reduz a queſtaõ a ſaber a lei pela qual varia a velocidade, quando varia a altura KG.

430 Conſideremos pois as tres experiencias do n°. 425, em que a adufa eſtava elevada 1 pollegada. Na primeira temos $EG = 105$ pés, $OG = 10{,}5$, e $EN = 1{,}416$ (n. 418.). Logo $KG = 11{,}916$ pés, e a altura devida á velocidade permanente com que he realmente corrido o eſpaço EG ſerá $= 2{,}036$ pés (n. 420.); e eſta altura he para KG como 2036 para 11916, ou como 1 para 5,84 proximamente.

Na ſegunda $EG = 105$ pés, $OG = 10{,}5$, $EN = 2{,}978$, $KG = 13{,}478$ pés; e acharemos 2,871 por altura devida á velocidade permanente com a qual he corrido o eſpaco EG, a qual he menor que KG na raſaõ de 2871 para 13478, ou de 1 para 4,69 proximamente.

Na terceira $EG = 105$ pés, $OG = 10{,}5$, $EN = 4{,}54$, $KG = 15{,}04$; e acharemos 3,496 por altura devida á velocidade permanente com que he corrido o canal EG, a qual he menor que KG na raſaõ de 3496 para 15040, ou de 1 para 4,3 proximamente.

431 Conſideremos tambem as experiencias 6ª 12ª e 18ª do n.° 426, quando a adufa eſtava levantada 2 pollegadas; e para reduzirmos a primeira dellas a poder-ſe comparar com as outras, dobraremos tanto o eſpaço 300 pés como

o tempo correſpondente. Aſſim teremos $EG = 600$ pés; $OG = 59{,}702$, $EN = 0{,}358$, $KG = 60{,}06$; e acharemos 2,058 por altura devida á velocidade permanente da agua no canal, a qual he para KG como 1 para 29,45 proximamente.

Na ſegunda $EG = 600$ pés, $OG = 59{,}702$, $EN = 0{,}749$, $KG = 60{,}451$; e teremos 2,604 por altura devida á velocidade, a qual he para KG como 1 para 23,21 proximamente.

Na terceira $EG = 600$ pés, $OG = 59{,}702$, $EN = 1{,}53$, $KG = 61{,}232$; e acharemos 3,071 por altura devida á velocidade que buſcamos, a qual he para KG como 1 para 19,93 proximamente.

432 De todos eſtes calculos reſulta, que as alturas devidas ás velocidades no canal naõ ſaõ entre ſi como as alturas correſpondentes KG. Porém quanto a altura inicial EN he maior, menos differe de KG a altura devida á velocidade da agua; donde ſe ſegue, que a fricçaõ he á proporçaõ menos ſenſivel nas velocidades maiores do que nas menores. Naõ ſerá pois exacto na pratica calcular a velocidade de huma corrente pela ſua declividade. He preciſo determinar-ſe por huma experiencia immediata em cada caſo particular.

433 Quando huma maquina ha de ſer movida por huma corrente, e pelas circunſtancias do terreno he neceſſario aſſentalla a certa diſtancia da reſerva, convem inclinar o canal a decima parte do ſeu comprimento com pouca differença, querendo que a maquina receba a meſma força, como ſe eſtiveſſe ſituada ao pé da reſerva.

434 Outra queſtaõ para examinar, he ſaber ſe a velocidade varía, quando a altura KG he conſtante, e a grandeza da abertura ſe aumenta, ou diminue. Na experiencia 12ª do nº 426 ſendo os orificios como 1 para 2 o eſpaço de 600 pés he corrido nos tempos 58 e 48, e conſeguintemente as velocidades ſaõ como 48 para 58, ou como 24 para 29. Donde ſe vê, que a velocidade he maior ſenſivelmente, quando ſe aumenta o orificio; e o meſmo ſe acha por todas as noſſas experiencias.

435 Alguns autores eſcreveraõ, que creſcendo o orificio, a velocidade deve aumentar proporcionalmente, ou que as velocidades ſaõ na raſaõ das quantidades de agua que daõ os canais no meſmo tempo. Eſta aſſerçaõ puramente

mente gratuita he deſmentida pela experiencia ; porque no exemplo que acabamos de referir , os orificios , ou as quantidades de agua por elles produzidas , ſaõ na raſaõ de 1 para 2 , e as velocidades ſomente na raſaõ de 24 para 29.

436 Em conformidade das experiencias precedentes , e das reflexões que ellas tem occaſionado , póde fazer-ſe idea do movimento das aguas nos aqueductos , conforme o comprimento , e declividade delles. He conveniente dar-lhes a maior declividade que póde ſer. Ordinariamente ſe fazem de differentes partes horizontais , que ſe vaõ abaixando por degráos , ou reſaltos , porque os officiais trabalhaõ mais facilmente por huma linha de livel do que por huma inclinada ; mas eſta pratica he muito viciosa. Para que a agua corra mais facilmente , e ſeja menos expoſta a gelar-ſe nos grandes frios , deve o canal fazer-ſe em declive por todo o ſeu comprimento , praticando reſervas de eſpaço em eſpaço , que recebaõ as immundicias que a agua traz comſigo , e que ſirvaõ para pôr o aqueducto em ſeco , quando for neceſſario reparallo. Tambem he conveniente , que o canal ſeja antes fundo que largo , para que a agua ſe ajude do proprio pezo a vencer a fricçaõ.

437 Para dizermos em fim huma palavra ſobre a preſſaõ da agua contra as paredes dos canais , he evidente que contendo ellas a agua de ſe derramar horizontalmente para todos os lados , ſaõ comprimidas pelo pezo della ; e quanto a eſta parte , cada ponto das paredes he comprimido perpendicularmente com huma força proporcional á altura do fluido que lhe correſponde. Além diſto , ſe a velocidade primitiva da agua vem a diminuir em virtude da fricçaõ , ou de qualquer outro obſtaculo , deſta perda de velocidade reſultará huma preſſaõ nova contra as paredes do canal , que ſerá igual ao exceſſo da preſſaõ que produziria a velocidade que a agua deveria ter naturalmente , ſobre a preſſaõ devida á velocidade effectiva della. Daqui ſe deduzirá o modo de proporcionar convenientemente as aberturas laterais feitas em hum canal ou aqueducto , quando ſe quizer derivar huma parte da agua delle.

Meios

Meios propoſtos por diverſos Autores para medir a velocidade das aguas correntes.

438 ATé agora naõ tratámos ſenaõ dos canais, e aqueductos regulares, e eſſes de pouca altura, de maneira que a velocidade podia conſiderar-ſe a meſma em toda a ſua profundidade. Agora conſideremos a velocidade em quaiſquer canais. De diſtancia em diſtancia póde variar ſenſivelmente; e póde tambem naõ ſer a meſma na ſuperficie que no reſto da altura. Eiſaqui os meios principais, que ſe tem imaginado para a medir.

439 Os corpos fluctuantes ſobre a agua, tomaõ em pouquiſſimo tempo toda a velocidade della. Aſſim póde medir-ſe a velocidade de huma corrente, lançando nella hum pequeno corpo mais leve, e obſervando-ſe o tempo que gaſta em correr hum eſpaço dado. Eſte corpo deve mergulhar-ſe quaſi inteiramente, para ſer o menos que he poſſivel expoſto ás agitações do ar.

M. Mariotte ſervio-ſe muito deſte methodo; e obſervou que a agua de hum rio varîa de velocidade da ſuperficie até o fundo. Para iſſo tomou duas bolas de cera prezas a hum fio de hum pé de comprido. Huma dellas tinha interiormente algumas pedrinhas para ficar mais pezada que a agua, de maneira que ſendo metidas na agua a mais pezada eſtendia o fio, e a outra ficava na ſuperficie quaſi inteiramente mergulhada. Aſſim achou, que em huma corrente de tres pés de altura, a bola debaixo ficava ſempre para traz, e mais notavelmente quando o fundo era mais aſpero e deſigual. Mas nos lugares, em que a agua pelo encontro de algum obſtaculo ſe levantava, e depois tomava hum curſo mais rapido, como ſe obſerva debaixo das pontes, a bola inferior paſſava adiante da ſuperior.

Por eſte exemplo ſe vê, que a velocidade augmenta ou diminue da ſuperficie para o fundo, conforme as circunſtancias. Naturalmente devia ſempre augmentar, em virtude da preſſaõ da agua ſuperior que he cada vez maior; mas póde ſuceceder que ſeja mais retardada pela reſiſtencia da frieçaõ, e de outros obſtaculos, doque accelerada pela preſſaõ.

440 Para o meſmo fim ſe uſa de hum molinete de

até 18 pollegadas de diametro, muito leve e perfeitamente movel ſobre o ſeu eixo, que deve ſer delgado, e bem polido, e que póde em cada extremidade aſſentar ſobre dous cylindros moveis, para ſe deſtruir quaſi totalmente o effeito da frieçaõ. Do eixo para a circumferencia ſahem 15 ou 18 pennas muito delgadas de folha de flandes, nas quais faz impreſſaõ a corrente. Aſſim conhecendo o raio medio, iſto he, a diſtancia do eixo ao ponto em que ſe julga reunida a impreſſaõ da agua, acharemos a circumferencia media; e havendo contado as revoluções em hum tempo dado, ſaberemos o eſpaço corrido pela agua, e conſeguintemente a ſua velocidade.

Eſte inſtrumento tem o inconveniente de naõ moſtrar commodamente a velocidade, ſenaõ junto á ſuperficie, e o de ſer expoſto na ſua rotaçaõ á reſiſtencia do ar. Mas he muito ſimples, e póde empregar-ſe utilmente algumas vezes.

441 M. Guglielmini (*Aquarum fluentium menſura lib.* 4.) propoem o meio de encerrar a corrente entre dous muros verticais e parallelos, de aplainar bem o fundo, e de fechar a entrada com huma comporta movediça verticalmente, por meio da qual ſe dê ao fluido huma abertura ou paſſagem rectangular, que o Autor chama *regulador*. A ſuperficie da agua na frente da comporta deve eſtar ſenſivelmente eſtagnante. A quantidade de agua que paſſa em hum tempo dado pelo regulador ſe determina pelo nº. 245, e a velocidade media della pelo nº. 246. Mas eſte methodo naõ he praticavel, ſenaõ em pequenos regatos.

442 M. Pitot propoem (*Mem. de l' Acad.* 1732.) hum tubo de vidro *A B* (Fig. 126.) encurvado em *C*, o qual ſe mergulha verticalmente na corrente ſendo fixamente applicado a huma regoa ſolida de madeira, ſobre huma graduaçaõ aberta em huma chapa de cobre. A altura *CM* a que a agua ſe levanta no tubo he a devida á velocidade da corrente em *A*; porque a preſſaõ da columna *CM* faz equilibrio á força que tende a levantar a agua por *ACM*, e conſeguintemente a velocidade em *A* deve ſer a meſma, como ſe a agua neſte lugar tiveſſe cahido da altura *MC*. Mergulhando mais ou menos o tubo, teremos as alturas que correſpondem ás velocidades dos differentes pontos da corrente.

Naõ

Naõ ha couſa mais ſimples que eſte inſtrumento. O Autor ſe ſervio delle para medir a velocidade do Sena debaixo da ponte real. Mas he muito difficil de ſe fixar com a ſolidez neceſſaria, para que a agua naõ ſeja ſujeita a movimentos oſcillatorios, os quais produzem grande incerteza no juizo da ſua verdadeira elevaçaõ. Eſte inconveniente he tanto mais ſenſivel, quanto mais ſe mergulha o tubo, e quanto a velocidade da corrente he maior.

443 Tambem ſe uſa muito na pratica de hum quarto de circulo ACB (Fig. 127.), guarnecido no centro de dous fios, hum mais curto que ſuſtenta no ar o pezo P, e outro mais comprido CH ou CM, o qual ſuſtenta outro pezo que ſe mergulha mais ou menos, conforme ſe larga mais ou menos o fio. Pela deviaçaõ deſte fio da vertical ſe mede primeiramente a força, e depois ſe conclue a velocidade da corrente, deſta maneira.

444 Seja F o pezo conſtante deſtinado a ſer mergulhado no fluido, e repreſente-ſe pelas verticais HK, MO iguais entre ſi. Reſolvendo cada huma deſtas forças em duas, huma HL ou MQ na direcçaõ do fio, e outra HI ou MN na direcçaõ da corrente, teremos $HI = F.\frac{ſen\,XCR}{ſen\,XRC}$, e $MN = F.\frac{ſen\,XCS}{ſen\,XSC}$. Donde ſe ſegue, que a força igual e contraria da corrente he o producto do pezo F pela raſaõ do ſeno do angulo formado pelo fio com a vertical ao ſeno do angulo formado pelo fio com a corrente. O primeiro angulo he dado immediatamente pela graduaçaõ do inſtrumento, e o ſegundo XRC ou XSC he ſempre facil de determinar; porque tirando a horizontal xy, conheceremos o angulo yXY, por ſer dada a direcçaõ da corrente, e teremos $XRC = XxC - RXx$, e $XSC = XsC - SYs$.

Quando a direcçaõ da corrente he horizontal, temos $yXY = o$, e $\frac{ſen\,XCR}{ſen\,XRC} = tang\,XCR$, $\frac{ſen\,XCS}{ſen\,XSC} = tang\,XCS$. Donde ſe ſegue, que entaõ he a força da corrente como a tangente do angulo formado pelo fio com a vertical.

445 Suppondo agora, que a impulſaõ de hum fluido contra o meſmo corpo he na raſaõ duplicada da velocidade

dade, como ſe moſtrará na theorica da percuſſaõ dos fluidos, e deſignando por u a velocidade em H, e por V a velocidade em M, teremos $uu : VV :: \frac{F \cdot sen\ XCR}{sen\ XRC} : \frac{F \cdot sen\ XCS}{sen\ XSC}$, e $V = u\sqrt{\frac{sen\ XCS \cdot sen\ XRC}{sen\ XSC \cdot sen\ XCR}}$.

Póde pois medir-ſe a velocidade u na ſuperficie por meio dos corpos fluctuantes. Entaõ dando ao fio CH o comprimento neceſſario para que o pezo H ſe mergulhe preciſamente até a altura do ſeu diametro, e depois deixando-o mergulhar a qualquer profundidade, medir-ſe-haõ os angulos XCR, XRC, XCS, XSC, e achar-ſe-ha V pela equaçaõ precedente.

446 Querendo exactidaõ nos reſultados, he neceſſario ter muita precauçaõ no uſo deſte inſtrumento. O fio, que ſuſtenta o pezo mergulhado, eſtá ſujeito a movimentos de oſcillaçaõ, que o chegaõ e apartaõ da vertical, e que fazem incerta a medida do angulo que faz com ella. Iſto ſuccede principalmente, quando a gravidade eſpecifica do pezo mergulhado excede pouco a do fluido. Por outra parte naõ ſe póde aumentar muito a ſua gravidade eſpecifica, porque entaõ as pequenas variações das velocidades naõ ſeriaõ ſenſiveis no inſtrumento.

CAPITULO VI.

Do movimento dos Rios.

447 A Indagaçaõ das leis, que ſeguem os rios nos ſeus movimentos, he hum ramo da Hydraulica, que tem dado occaſiaõ a muitas obras. Hum dos melhores livros neſta parte he o Tratado da natureza dos rios de Guglielmini, que ſe imprimio a primeira vez em 1697, e depois ſe reimprimio em 1739 com as notas muito inſtructivas de Euſtachio Manfredi. M. de Buffon na ſua Hiſtoria Natural fez muitas reflexões novas e importantes ſobre o movimento dos rios. Eiſaqui tambem o reſultado do que tenho lido e reflectido ſobre a meſma materia.

Conſidera-

Conſideraçõcs gerais ſobre o movimento dos rios.

448 MUito tempo ſe diſputou ſobre a origem dos rios. Deſcartes imaginou, que a agua do mar por canais ſubterraneos inclinados ſe encaminhava para as grandes cavidades preparadas pela natureza debaixo das montanhas; que alli ſendo expoſta á acçaõ de hum fogo, que ardia perpetuamente debaixo daquellas immenſas caldeiras, ſe elevava em vapores pelo corpo das montanhas acima, como pelo capitel de hum alambique; e que depondo deſta maneira o ſal, formava huma maſſa de agua doce, que ajuntando-ſe de varias partes, pelo ſeu proprio pezo ſe reſtituia ao mar. Mas eſte ſyſtema ingenhoſo he fundado em ſuppoſições gratuitas, e abſolutamente inadmiſſiveis. Donde podia naſcer aquelle fogo, que continuamente havia de eſtar applicado a taõ vaſtas caldeiras? e para onde ſe recolhiaõ todos os ſais, que a agua depunha pela evaporaçaõ no interior das montanhas?

Os que differaõ, que as aguas do mar penetraõ por toda a parte o globo terreſtre, e que depois de haverem filtrado e depoſto os ſais, tornaõ doces para o meſmo mar, ainda imagináraõ peor. Porque as aguas naõ podem por ſi meſmas elevar-ſe acima do ſeu livel, nem conſeguintemente formar correntes, que deſçaõ dos lugares elevados para o mar.

He demonſtrado, e reconhecido hoje de todo o mundo, que o cabedal das fontes e dos rios he fornecido pelas aguas da chuva, que ſe ajuntaõ nas cavidades das montanhas, donde deſcem pelo ſeu pezo, e ſe reſtituem ao mar por canais abertos pela arte, ou pela natureza. M. Halley fez ver pelo calculo (*Tranſact. Philoſ.* nº. 192.), que os vapores que ſe levantaõ do mar, e que os ventos tranſportaõ ſobre a terra, ſaõ mais que ſufficientes para formar todas as fontes, e rios da ſuperficie terreſtre.

449 Para ſe mover a agua de hum rio, naõ he neceſſario que o fundo ſeja declive; baſta que a ſuperficie eſteja mais elevada que o livel do mar. Porque qualquer maſſa de fluido, que tem a liberdade de ſe derramar, abaixa-ſe até ſe pôr de livel em toda a ſua extenſaõ. Mas no eſtado phyſico e actual das couſas as madres dos rios

ſaõ

ſaõ inclinadas, ao menos na maior parte. As ſuas differentes inclinações e ſinuoſidades dependem da reſiſtencia do fundo e dos obſtaculos, que a agua encontra no caminho.

450 Seja *A D C X* (Fig. 128.) huma grande reſerva, donde o rio *X C E F* tira o ſeu cabedal. Sendo as particulas inferiores da reſerva comprimidas pelas ſuperiores, eſtá claro, que preſcindindo dos obſtaculos, a velocidade da particula *C* ſerá como ſe ella houveſſe cahido da altura *X C*, e a velocidade de cada huma das outras devida á altura correſpondente. A' medida que a agua caminha pelo plano inclinado *C E*, a velocidade ſe acceléra pela acçaõ da gravidade; de maneira que conduzindo a horizontal *H G*, a velocidade em *P* ſerá devida á altura *H P*, a velocidade em *M* á altura *H M* &c.

451 Donde ſe ſegue, que a profundidade da agua deve diminuir á medida que ſe retira da origem, ſendo a largura conſtante. Porque eſtando o rio em hum eſtado permanente, e paſſando conſeguintemente a cada inſtante a meſma quantidade de agua por duas quaiſquer ſecções *M P*, *V R*, he evidente que ſendo maior a velocidade em cada hum dos pontos de *V R* do que em cada hum dos pontos correſpondentes de *M P*, deve ſer *V R* neceſſariamente menor que *M P*.

452 Mas as profundidades *MP*, *VR*, poſto que ſempre deſiguais entre ſi, chegar-ſe-haõ tanto mais para a igualdade, quanto mais ſe tomarem longe da origem, porque as velocidades das particulas differem de menos em menos. Com effeito deſignando por *M*, *V*, *P*, *R* as velocidades reſpectivas deſtes pontos, teremos $M : P :: \sqrt{HM} : \sqrt{AP} :: \sqrt{HM} : \sqrt{(HM + MP)}$, e $V : R :: \sqrt{GV} : \sqrt{(GV + VR)}$. Logo $\frac{M}{P} = \sqrt{\frac{HM}{HM + MP}}$, e $\frac{V}{R} = \sqrt{\frac{GV}{GV + VR}}$. Porém $\frac{GV}{GV + VR} > \frac{HM}{HM + MP}$, ou $GV . HM + GV . MP > GV . HM + HM . VR$, e conſeguintemente $GV . MP > VR . HM$, por ſer $MP > RV$ e $GV > HM$. Logo tambem $\frac{V}{R} > \frac{M}{P}$; e por conſeguinte, a velocidade V differe menos de R do que a velocidade

cidade *M* differe de *P*. Mas ſe a velocidade foſſe conſtante em cada huma das profundidades, tambem o ſeriaõ as meſmas profundidades. Logo, variando menos as velocidades, á medida que ſaõ mais diſtantes da origem, tambem as profundidades devem variar cada vez menos, ou chegar-ſe cada vez mais para a igualdade.

453 Por iſto ſe póde fazer huma idéa geral do movimento dos rios. Mas muitas cauſas impedem que naõ ſejaõ as couſas em rigor, como temos repreſentado. Taes ſaõ as deſigualdades do fundo, as ſinuoſidades da madre, o alargamento e eſtreitamento della, a fricçaõ, e obſtaculos de toda a eſpecie que a agua encontra, e que perturbaõ a ſua corrente natural; e daqui reſultaõ differentes variedades na velocidade dos rios. Muitas vezes em lugares diſtantes da origem, e muito mais baixos do que ella, he a velocidade menor do que na meſma origem, quando devia ir ſempre em creſcimento. Em cada ponto ſe fazem novas combinaçoens entre o movimento adquirido, e o que he produzido a cada inſtante pela altura actual da agua. Nos lugares eſtreitos e profundos, a velocidade primitiva he como nenhuma em comparaçaõ da que he devida á altura actual; e nos largos, onde a agua tem pouca profundidade, quaſi que ſe naõ move ſenaõ em virtude da velocidade adquirida precedentemente. O ponto da maior velocidade raras vezes he perto do fundo, algumas ſe acha na ſuperficie, e de ordinario naõ longe do meio da profundidade. A ſua poſiçaõ depende da reſiſtencia do fundo combinada com as forças activas que produzem a corrente.

454 Deſtas reflexoens ſe vê, que naõ he poſſivel ſujeitar a hum calculo rigoroſo e exacto o movimento dos rios, tomado em toda a ſua complicaçaõ. Sem embargo moſtraremos como poderia determinar-ſe, ſe foſſe conhecida a lei da retardaçaõ de cada particula, que provêm da reſiſtencia dos obſtaculos.

Seja *XCEF* (Fig. 129.) a ſecçaõ vertical e longitudinal de hum rio, que tira a ſua agua da reſerva *AXCD*; e ſupponhamos que cada particula experimenta huma reſiſtencia proporcional a huma potencia dada da ſua velocidade. Deve achar-ſe eſta velocidade.

Havendo produzido a horizontal *AX*, tire-ſe *KQ* perpendicular á direcçaõ da corrente; e conſiderando na parte

della

della TQ o elemento Mm, dos pontos T, M, Q levantem-se as verticais TS, ML, QH. Entaõ ſuppondo, que ML repreſenta a preſſaõ que ſofreria o ponto M em virtude do pezo da agua debaixo da altura ML, e que OR repreſenta a reſiſtencia que experimenta o ponto T ſituado na ſuperficie em virtude da fricçaõ do fundo e das margens; ſeja $KT = a$, $TS = b$, $KM = x$, e conſeguintemente $ML = \frac{bx}{a}$, $OR = c$, a altura devida á velocidade do ponto $T = b$, a altura devida á velocidade do ponto $M = y$, e o expoente da potencia da velocidade á qual he proporcional a reſiſtencia $= n$.

Iſto poſto, repreſentando as velocidades pelas raizes quadradas das alturas que lhes ſaõ devidas, teremos pelas condiçoens do Problema $c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}$ por expreſſaõ da reſiſtencia, que padece o ponto M em virtude da fricçaõ. Porém ſe naõ houveſſe fricçaõ, o meſmo ponto ſe moveria como ſe houveſſe cahido da altura ML, ou como ſe eſtiveſſe ſujeito á preſſaõ $\frac{bx}{a}$. Logo, tirando deſta força a reſiſtencia achada, ſerá $\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}$ a força que actualmente impelle o ponto M, e $Mm\left(\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}\right)$ a força abſoluta que impelle a agua que paſſa pelo elemento Mm. Eſta força he proporcional á quantidade de movimento, que produz; e porque a maſſa de agua, que paſſa a cada inſtante por Mm, he na raſaõ compoſta da velocidade e do elemento Mm, teremos $Mm.Vy.Vy$, ou $Mm.y$ por expreſſaõ da quantidade de movimento. Logo $Mm\left(\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}\right) = Mm.y$, e conſeguintemente

$$b^n\left(bx - ay\right)^2 = a^2c^2y^n.$$

Para uſar deſta equaçaõ determinaremos b por meio de algum corpo fluctuante, e mediremos as rectas KT, KQ,

KQ, TS, e QH. Pelo que reſpeita á linha OR ou c, notaremos que fazendo $x = a$, temos $y = b$, e a equaçaõ precedente ſe reduz a $(b - b)^2 = c^2$, ou $c = b - b$. Se $n = 1$, a equaçaõ que dá y he do ſegundo gráo; ſe $n = 2$, do primeiro; ſe $n = 3$, do terceiro &c. Naõ me demoro em diſcutir por miudo as conſequencias particulares deſtas equaçoens, porque o meu objecto principal naõ he de offerecer ao eſpirito verdades theoricas, mas de eſcrever huma obra, que ceda em proveito da pratica. Aſſim nos viramos para as queſtoens relativas a eſta tençaõ; e quando ellas naõ ſaõ ſuſceptiveis de ſoluçoens rigoroſas, tratamolas phyſicamente, iſto he, de hum modo algum tanto vago, mas ſufficiente para o uſo que dellas ſe póde fazer.

455 A ſuperficie de hum rio naõ eſtá ſempre de livel de huma borda para a outra; mas algumas vezes he mais ou menos elevada no meio, conforme as circumſtancias. O primeiro caſo ſuccede, quando o rio tem hum curſo perfeitamente livre, e vem a aumentar conſideravelmente, ou pela deſcongelaçaõ das neves, ou pela entrada de outro rio. Sendo as aguas das margens mais retardadas pela fricçaõ que as do meio, eſtas conſervaõ neceſſariamente maior parte da velocidade inicial. Porém, em virtude da perda reſpectiva de velocidade, eſtas aguas ſe comprimem lateralmente humas ás outras (n. 409. 437); e como a ſuperficie do rio ſe ſuppoem em hum eſtado permanente, eſtas preſſoens devem fazer equilibrio entre ſi. Logo onde he menor a perda de velocidade deve correſponder a maior altura de livel, a fim de que o exceſſo de huma altura ſobre outra produza huma velocidade que tambem ſe deſtrua em parte, e que aſſim occaſione huma nova preſſaõ, a qual ſe ajunte á preſſaõ devida á altura commua de livel, de maneira que a ſoma deſtas preſſoens ſeja igual á preſſaõ da agua das margens. Deve pois formar o rio neſte caſo huma curva convexa para a parte do meio, cuja ſagitta ou abſciſſa póde algumas vezes chegar a 2 ou 3 pés.

456 Póde ſuccéder pelo contrario, que a agua ſe levante mais nas margens do que no meio, quando encontra algum obſtaculo no caminho. Por exemplo, ſe o rio ſe lança em hum mar ſujeito a enchentes e vaſantes, eſtá claro que tendo a agua das margens menos velocidade

dade ſerá reppellida mais facilmente no tempo da enchente, e conſeguintemente ſubirá maior quantidade de agua do mar ao longo das margens do que pelo meio do rio, e em virtude deſte aumento de agua para a parte das margens, póde o rio ſer mais elevado nellas do que no meio. Muitas vezes ſe formaõ duas correntes diſtintas, e contrarias, huma no meio que ſe dirige ao mar, e outra nas bordas que ſobe ao longo do rio.

457 Em todos os rios ha frequentes remanſos de agua, occaſionados pela poſiçaõ dos obſtaculos que ſe oppoem ao movimento livre da corrente. Neſtes ſe vê a agua algumas vezes como eſtagnada, outras vezes agitada com fortes movimentos turbinatorios, donde ſahem com bem difficuldade os barcos, que paſſaõ por elles.

458 Obſerva-ſe conſtantemente, que eſtando para vir huma cheia, a agua para a parte do fundo corre com mais velocidade que a ordinaria. A raſaõ deſte effeito he, porque o pezo das aguas ſuperiores ſe faz ſentir até huma grande diſtancia; e aſſim vindo a aumentar-ſe a carga do fundo, deve a velocidade aumentar-ſe tambem.

459 Quando a madre de hum rio vem a eſtreitar-ſe, a profundidade aumenta neceſſariamente, e por conſequencia a velocidade. Muitas vezes he neceſſario conhecer, ao menos proximamente, a mudança que ſuccede na altura de hum rio, quando ſe faz alguma mudança na extenſaõ da madre. Eſta queſtaõ he ſobre tudo neceſſaria, quando ſe trata de conſtruir huma ponte. Examinemos eſte caſo particular.

460 Para maior ſimplicidade ſupponhamos, que a ſecçaõ vertical e latitudinal do rio he hum rectangulo *ACDB* (Fig. 130.), e preſcindamos de toda a reſiſtencia. Levantando a vertical indefinida *KN*, ſupponhamos que a velocidade na ſuperficie *AB* he devida á altura *OM*. Por quanto preſcindimos de toda a reſiſtencia, a velocidade de qualquer ponto *R* ou K ſerá devida á altura correſpondente *MR* ou *MK*; e a agua correrá, como ſe ſahiſſe pela abertura *ACDB* da reſerva *aCDb* conſtantemente cheia na altura *MK*. Agora, ſupponhamos que ſendo a agua coanguſtada pelos arcos da ponte, corre pela abertura rectangular *EFGH*, da qual ſe conhece a baſe *FG*. Sendo *IN* a altura devida á nova velocidade da ſuperficie *EH*, o movimento ſe fará como ſe a agua ſahiſſe pela abertura

EFGH

EFGH de huma reſerva *fCDg* conſtantemente cheia á altura *NK*.

Seja pois $CD = c$, $MK = H$, $MO = b$, a quantidade de agua que no tempo t corre por $ACDB = Q$, $FG = c'$, $NK = H'$, $NI = b'$, a quantidade de agua que no meſmo tempo paſſa por $EFGH = Q'$, e altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo $= a$; e teremos $Q = \frac{4}{3} tc((HVH - bVb)Va$, $Q' = \frac{4}{3} tc'(H'VH' - bVb)Va$ (n. 245.). Porém $Q = Q'$; logo $c(HVH - bVb) = c'(H'VH' - b'Vb')$.

461 Supponhamos, que a velocidade he nulla na ſuperficie em ambos os caſos, o que he ſenſivelmente verdadeiro em muitas occaſioens; e teremos $cHVH = c'H'VH'$, donde ſe tira $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$, iſto he, que *a profundidade do rio antes da exiſtencia da ponte he para a profundidade que depois ha de ter, como a raiz cubica do quadrado da ſoma das larguras dos arcos para a raiz cubica do quadrado da largura do rio.*

462 Quando as alturas b, b' naõ ſaõ nullas, devem ſer ſenſivelmente proporcionais ás alturas H, H', e conſeguintemente $b' = \frac{bH'}{H}$. Subſtituindo eſte valor na equaçaõ, e dividindo tudo por $HVH - bVb$, acharemos igualmente $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. E porque a proporçaõ $H : H' :: b : b'$ dá $H - b : H' - b' :: H : H'$, teremos $H - b : H' - b' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Porém $H - b$, $H' - b'$ ſaõ as profundidades do rio nos dous caſos; logo neſta hypotheſe ſeraõ as profundidades na meſma raſaõ, que havemos enunciado no n.º precedente.

463 Se naõ ſe quizeſſe admittir a hypotheſe do n.º 460, que as velocidades da agua ſaõ cõmo as raizes quadradas das alturas, mas em virtude da frieçaõ ſe ſuppuzeſſe ſer OS a altura devida á velocidade media na ſecçaõ $ACDB$, e IT á velocidade da ſecçaõ $EFGH$, o problema naõ ſeria mais difficultoſo. Porque fazendo $AC = b$, $CD = c$, $SO = H$, $EF = b'$, $FG = c'$, $IT = H'$,

H', eſtá claro, que ſendo iguais as quantidades de agua que no meſmo tempo paſſaõ por ambas as ſecções, teremos $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$; e porque a lei pela qual os pontos S, T eſtaõ poſtos ſobre as alturas KO, KI ſe ſuppoem dada, teremos outra equaçaõ, que combinada com a primeira determinará as incognitas H', b'.

Quando, por exemplo, os pontos S, T eſtaõ ſemelhantemente poſtos ſobre as rectas KO, KI, teremos $H : H' : b : b'$, e $b' = \frac{bH'}{H}$. Subſtituindo eſte valor na equaçaõ $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$, acharemos $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$, e por conſeguinte $b : b' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Donde ſe vê, que as profundidades ſaõ tambem neſte caſo na raſaõ que já fica enunciada.

Em todos eſtes calculos havemos ſuppoſto, que a madre do rio he hum canal rectangular, o que nunca tem lugar em rigor. Mas ſempre ſerá facil de ſe modificar a theorica, conforme a exigencia dos caſos, e de ſe adaptar, ao menos proximamente, aos problemas deſte genero, que na pratica podem occorrer.

Conſiderações phyſicas ſobre o modo com que os rios eſtabelecem as ſuas madres.

464 A Corrente de hum rio, pela fricçaõ que experimenta na madre, faz deſapegar alguma terra que leva comſigo; e o canal ſe alarga, e profunda neceſſariamente, em quanto a reſiſtencia que oppoem na ſua ſuperficie naõ chega a igualar a força da agua. Porém como a madre fazendo-ſe maior perde pouco a pouco a ſua declividade, como a velocidade primitiva diminue pelo encontro dos cotovelos e de outros obſtaculos, e como as terras mais fundas tem maior tenacidade, ſuccede em fim que a reſiſtencia dellas ſe poem ſenſivelmente em equilibrio com a força das aguas; e ſe para o perturbar ſe mete algum obſtaculo de novo á corrente, a força da agua torna a lutar contra elle, até reſtabelecer outra vez o equilibrio.

Os

Os rios mais depreſſa ceſſaõ de profundar do que de alargar a madre. Porque a tenacidade do fundo, e a diminuiçaõ da velocidade concorrem a afrouxar, ou a impedir a profundaçaõ, e pelo contrario a diminuiçaõ da velocidade e declividade aumentaõ a altura da agua, e conſeguintemente a preſſaõ e frieçaõ que reſulta nas margens. Por eſta raſaõ, os rios que correm por terras homogeneas, e de pouca conſiſtencia, ſendo as mais couſas iguais, ſaõ mais largos que fundos.

465 Todos os rios naõ formaõ do meſmo modo as ſuas madres; pois he certo, por exemplo, que a meſma corrente cava e leva conſigo mais facilmente hum fundo de areia, do que outro de greda ou de caſcalho. Mas ſupponhamos que he dada a força da agua, e a reſiſtencia do terreno, e vejamos o effeito que deve reſultar. He evidente, que os obſtaculos de hum plano inclinado tem tanta mais ventagem, quanto elle ſe chega mais para a ſituaçaõ horizontal, porque tanto mais ſe diminue o effeito da gravidade. O meſmo ſuccede na madre de hum rio; e a força da corrente naõ ceſſa de combater com a reſiſtencia do terreno, em quanto a diminuiçaõ da declividade naõ faz a ſegunda força igual á primeira.

466 Daqui ſe ſegue, que ſendo a reſiſtencia do terreno conſtante, quanto maior for a força da corrente, tanto menor ſerá a declividade, no caſo do equilibrio. E porque a velocidade da agua perto do fundo mais he devida á preſſaõ da agua ſuperior que ao movimento adquirido precedentemente, ſegue-ſe tambem que quanto mais fundo for hum rio, tanto menor ſerá a declividade. Se elle contém por toda a parte a meſma quantidade de agua, poderá o fundo conſiderar-ſe rectilineo em huma pequena extenſaõ; mas em hum longo eſpaço formará huma ſpiral, cujas tangentes faraõ ſempre angulos iguais com as perpendiculares correſpondentes tiradas do centro da terra, que he o centro da meſma ſpiral; e eſta ſe chegará tanto mais para hum circulo, quanto mais ſe chegarem os ditos angulos para rectos.

Quando a quantidade de agua aumenta, ou pelas chuvas, ou pela entrada de outro rio, a força da corrente aumenta tambem, e o fundo por conſeguinte tende cada vez mais a fazer-ſe horizontal. Daqui vem, que ſe muitos rios ſe reunem, a madre commua naõ tem tanta declivi-

slividade como tinhaõ as madres particulares delles antes da uniaõ.

467 Temos viſto (n. 450.), que prelcindindo da reſiſtencia a velocidade da corrente ſe deveria accelerar continuamente em virtude da declividade. Suppondo agora, que a pezar da reſiſtencia ſubſiſte em parte eſta acceleraçaõ ſobre hum eſpaço determinado, eſtá claro que a força da agua ſe aumenta. Por conſeguinte a declividade irá ſempre diminuindo, e ſerá a menor poſſivel quando a acceleraçaõ da velocidade for a maior que he poſſivel. Donde ſe ſegue, que ſe dous rios deſiguais ſe accelerarem do meſmo modo, o maior terá menor declividade. Em quanto durar a acceleraçaõ, o fundo formará huma curva concava, cujas tangentes faraõ com as perpendiculares tiradas do centro da terra angulos cada vez maiores á medida que ſe aparta da origem da acceleraçaõ. Mas aſſim que a velocidade vem a ſer uniforme, o fundo ſe faz ſenſivelmente rectilineo, ou fórma a ſpiral que já diſſemos.

468 Quando hum rio tem por ſi meſmo a força de excavar o fundo, ſem ajuda da declividade, o fundo ſerá neceſſariamente horizontal. Porque no caſo de que ſe lhe deſſe declividade, muito mais facilmente o excavaria, e pelo que temos viſto o reduziria á ſituaçaõ horizontal. Seja, por exemplo, *AEBD* (Fig. 131.) a ſecçaõ vertical e longitudinal de hum rio, que no lugar propoſto tem o fundo *EB* horizontal; e ſupponhamos, que adiante do ponto *B* a força da corrente ſe aumenta, ou por receber nova agua, ou por ſe eſtreitar a madre &c. Eſtá claro, que ganhando a agua mais força excavará mais o fundo de *B* para diante, e ao meſmo tempo irá gaſtando o angulo *HBC*, e o fundo todo tomará a inclinaçaõ *HC*; a qual favorecendo a força da corrente fará reſtituir o fundo á poſiçaõ *MCG* horizontal, ou quaſi horizontal. Digo *quaſi horizontal*; porque ſendo a agua *AEBD* ſuſtentada por *DFGC*, quando o fundo *EB* ſe abaixa para *MC*, naõ póde a ſuperficie *AD* abaixar-ſe ſem que as aguas *DFGC* caiaõ hum pouco ſobre as aguas *AEBD*, o que diminue a velocidade da corrente, que por iſſo poderá naõ ter a força neceſſaria para reſtituir o fundo inteiramente á ſituaçaõ horizontal.

Póde logo ſuccéder que hum rio que tem a força de manter

manter o fundo horizontal, em recebendo outro rio perderá parte deſta força, e requeira declividade; eſta porem naõ he produzida pela elevaçaõ do fundo, mas por huma excavaçaõ real. Suppondo que ella ſe repreſenta por *EC*, e que corta *BE* no ponto *E*, he evidente que o rio terá ganhado outra vez no ponto *E* a altura primitiva, e a força de fazer o fundo horizontal. A declividade *EC* irá diminuindo, ſe o rio na vezinhança do ajuntamento ſe eſtreitar em virtude do obſtaculo que lhe oppoem o rio affluente, porque entaõ o movimento perdido ſerá mais que compenſado pela maior preſſaõ da agua e aumento da maſſa.

469 Seja *AD* (Fig. 132.) hum rio que tem ſimplesmente a força de conſervar o fundo *CD* horizontal; e ſupponhamos, que em *D* ſe alarga, ou divide em muitos braços, de maneira que ſe reduz á altura *BE* menor que *AC*. Entaõ naõ terá força para manter o fundo horizontal; e ſe a corrente trouxer comſigo materias eſtranhas, formarſe-ha ſobre *DG* o aterro *DEFG*, com a ſuperficie *EF* em declive. E porque a face *DE* naõ póde ſuſter-ſe a prumo, o angulo *E* ſerá levado, e ſe eſtabelecerá a aclividade *HL* terminada de huma parte no fundo horihorizontal *CH*, e da outra no declive *EF*. Donde ſe vê, que póde formar-ſe em *D* hum aterro, ſem diminuir a força da agua *AH*; e ſem o fundo *CH* deixar de ſer horizontal.

Diminuindo a força da agua em quanto ſe fórma a eſcarpa *HL*, deveria elevar-ſe; mas como entaõ havia de cahir ſobre *AB*, acha mais facilidade em ſe alargar e corroer as margens. Eſte alargamento tem lugar no eſpaço das margens fronteiro á eſcarpa *HL*, em quanto ella ſe eſtabelece, depois do que formando-ſe em *L* a declividade *LF*, e conſervando-ſe a agua na meſma altura, a largura ſerá tambem a meſma.

470 Temos viſto (n. 466.) que ſendo a reſiſtencia do terreno conſtante, a declividade he tanto menor quanto a força da corrente he maior. Do meſmo principio ſe ſegue tambem, que ſendo a força da corrente conſtante, quanto maior for a tenacidade do terreno, tanto maior ſerá a declividade. E dahi naſce que os rios que correm ſobre fundos de greda, ou de tufo, tem maior declividade do que os que correm ſobre lodo, ou areia. Quando o fundo

he

he de materia que a agua naõ póde excavar, a declividade naõ ſe altera ſenaõ muito pouco pela continuaçaõ do tempo. E ſe o fundo naõ for igualmente reſiſtente, a declividade mudará á proporçaõ da reſiſtencia, conforme ao que temos explicado. Em tudo iſto ſuppomos, que a declividade do fundo naõ permitte ás materias eſtranhas miſturadas com a agua a liberdade de pararem, e ſe depoſitarem em algum lugar. Se iſto ſucceder, reſultaráõ muitas outras variaçõés na profundidade, largura, e direcçaõ da madre, conforme os lugares onde ſe fizer eſſe depoſito.

471 Supponhamos que hum rio, pela combinaçaõ da ſua força com a reſiſtencia do terreno, deveria eſtabelecer o fundo *AB* (Fig. 133.), e que eſte eſtá cuberto com o triangulo *ABC* da meſma materia. He evidente, que a agua correndo ſobre o fundo *CB* terá a força de o excavar; mas como o naõ póde fazer em hum inſtante, ſupponhamos que no tempo que gaſta em levallo de *CB* até *DB*, recebe pela afluencia de huma torrente a materia que baſta para reſtituir o fundo a *CB*; entaõ tornará a excavallo de novo até *DB*, e aſſim por diante; de maneira que o fundo naõ chegará jámais a *AB*, mas andará ſempre alternativamente entre os limites *CB*, *DB*.

He de notar que a enchente do rio, e o abaixamento da madre produzem variedades na força da corrente, ainda que a quantidade da materia arraſtada pela maior declividade *CB* no tempo da enchente ſeja igual á que he arraſtada pela menor declividade *DB* quando a agua tem menos altura. Mas em tudo iſto póde tomar-ſe hum meio arithmetico, e ſuppor-ſe que as excavações ſaõ proporcionais aos tempos em que ſaõ feitas.

472 Como a quantidade da materia conduzida ao rio pela afluencia da torrente aumenta ou diminue, conforme a torrente he mais ou menos copioſa, ſegue-ſe que o rio terá menos declividade quando for maior o intervallo entre duas cheias conſecutivas da torrente, e quando eſtas forem menores, e durarem menos tempo. Mas por outra parte, tendo o rio mais força para excavar, quando he mais cheio e por mais tempo, a declividade do fundo ſerá tanto menor quanto maiores forem as ſuas enchentes e durarem por mais tempo. Como pois a enchente do rio tanto em grandeza como em duraçaõ depende

pende da cheia da torrente, e como a primeira faz maior excavaçaõ, e a ſegunda traz maior copia de materia, ſerá neceſſario examinar como eſtas duas cauſas ſe combinaõ em cada caſo, para avaliar o effeito da que for ſuperior.

473 Quando hum rio recebe de huma torrente tal quantidade de terra ou areia, que naõ póde incorporar-ſe com a agua, depoſita-ſe no fundo, e faſſo levantar: e ceſſando o curſo da torrente, a materia depoſitada ſerá excavada, e levada pelo rio pouco a pouco. Se para produzir eſte effeito, he neceſſario mais tempo do que media entre duas cheias da torrente, o fundo naõ poderá ſer reduzido á menor declividade, que requer a força da agua e a reſiſtencia do terreno; mas andará entre dous limites, da maior excavaçaõ que o rio póde fazer, e da maior elevaçaõ que a torrente póde produzir.

474 Taes ſaõ as leis geraes, que os rios obſervaõ na declividade. Examinemos agora a ſua direcçaõ.

Todo o movimento he eſſencialmente rectilineo; e os rios, ſe nada os embaraçaſſe, caminhariaõ por huma linha recta deſde a origem até a foz. Mas a reſiſtencia deſigual do terreno, os depoſitos que ſe formaõ pelas materias que a agua acarreta, os obſtaculos naturais ou artificiais que encontra, produzem no fundo e nas margens bojos, cotovelos, e tortuoſidades de toda a eſpecie.

475 Seja *A C D E B* (Fig. 134.) a ſecçaõ latitudinal de hum rio rectilineo, cujo fundo actual he mais reſiſtente na parte *D E* que em *C D*; e ſupponhamos que a força da corrente baſta ſimpleſmente para impedir que ſe depoſitem as novas materias conduzidas pela agua, e que a reſiſtencia da parte *D E* baſta ſimpleſmente para impedir a excavaçaõ. Neſte caſo a parte menos reſiſtente *C D* cederá, e ſe profundará, por lhe ſer neceſſaria menor declividade para reſiſtir á ſeparaçaõ do terreno. Supponhamos pois que a agua tem excavado até *F D*; he evidente, que havendo adquirido maior altura *F G*, ainda terá mais força para excavar. Porem neſte tempo deve neceſſariamente diminuir a altura da agua em *H I* de huma quantidade conveniente á parte *C D F* de que a ſecçaõ do rio ſe tem aumentado; logo ſendo pela hypotheſe a velocidade primitiva em *I* ſimpleſmente baſtante para impedir o depoſito das materias eſtranhas, agora naõ ſerá

capaz

capaz deſte effeito. Aſſim levantar-ſe-ha o fundo *DE* para *DK*, e ſerá a nova ſecçaõ do rio *ACFDMKB*. A maior velocidade da agua ſerá para a parte da margem *AC*, a qual ſerá neceſſariamente gaſtada; quando pelo contrario a margem *EB* diſtando cada vez mais da veia da agua receberá os depoſitos das materias eſtranhas, e o rio perderá neſte lugar a ſua direcçaõ rectilinea.

476 Seja *BDFC* (Fig. 135.) a ſecçaõ rectangular eſtabelecida de hum rio em hum terreno uniforme, a qual por conſeguinte naõ póde mudar-ſe em quanto a agua for pura, e na meſma quantidade. Sendo a velocidade nas margens menor que no fundo, e ſuppondo que a velocidade primitiva no ponto *E* he ſimpleſmente a que baſta para impedir o depoſito de materias eſtranhas, he manifeſto que entrando no rio alguma quantidade dellas deveráõ formar hum depoſito para a parte das margens, e a ſecçaõ ſe fará mais pequena. Entaõ fazendo-ſe maior a altura da agua ſobre o ponto *E* entrará a excavar até *K*; e reſultando da maior profundidade da ſecçaõ huma velocidade maior em todos os pontos della, a força primitiva da corrente, que eſtava em equilibrio com a reſiſtencia das bordas, agora começará a gaſtallas, e a ſecçaõ ſe alargará pela parte ſuperior tomando a forma *ROKHG*.

Combinando os effeitos, que reſultaõ do depoſito de materias eſtranhas, com os da reſiſtencia deſigual do terreno, daremos a raſaõ de muitas deſigualdades, que ſe obſervaõ tanto na direcçaõ, como na profundidade dos rios.

477 Supponhamos que hum rio *AXDC* (Fig. 136.) rectilineo, ou tortuoſo, encontra o lanço de hum dique ou açude *BE*, ſituado obliquamente ſobre a borda *AX*. Se as particulas que ferem eſte muro foſſem inſuladas e elaſticas, ou ſe o muro foſſe perfeitamente elaſtico, cada huma dellas reflectiria fazendo o angulo de reflexaõ igual ao de incidencia. Ainda que eſta ſuppoſiçaõ naõ he admiſſivel em rigor, póde com tudo empregar-ſe para conhecer proximamente o movimento reflexo da agua.

Seja pois *GH* hum fio de agua, que reflecte por *HL* fazendo o angulo *EHL* igual a *GHB*. Encontrando *HL* o fio vezinho *SF* no ponto *F*, eſte ponto ſerá ſollicitado pelas direcçõeſ *FM*, *FL*, e deſcreverá a diagonal *FN*. Eſta, encontrando o muro em *P* ſerá reflectida por *PO*; e aſſim por diante. Deſte modo conheceremos o movimento

to, que o obſtaculo *B E* faz tomar a corrente. He evidente, que elle tende a dirigir a corrente para a margem oppoſta por huma direcçaõ mais ou menos obliqua, e que o effeito depende da ſua poſiçaõ combinada com a velocidade primitiva da agua; donde devem reſultar as niudanças proporcionadas na madre. Naõ me demoro em examinallas por miudo, pois ſe achaõ diſcutidas amplamente na Peça ſobre a conſtrucçaõ mais ventajoſa dos Diques, compoſta em commum por M. Viallet e por Mim, a qual ganhou o premio quadrupulo da Academia de Toloſa em 1762. Para ella remettemos o Leitor, que ſe quizer inſtruir mais profundamente ſobre eſta materia.

Do movimento dos rios na ſua embocadura; e da uniaõ, e ſeparaçaõ delles.

478 QUando a ſuperficie de hum rio ſe acha em eſtado permanente, iſto he, quando naõ ſe levanta nem abaixa, paſſaõ neceſſariamente no meſmo tempo quantidades iguais de agua por quaiſquer ſecçõeſ delle perpendiculares á direcçaõ da corrente. Donde ſe ſegue, que ſe hum rio permanece eſtavel na embocadura, deſpeja preciſamente tanta agua quanta recebe nas partes ſuperiores; ſe a ſuperficie ſe levanta, deſpeja menos do que recebe, e a differença produz a elevaçaõ; e ſe a ſuperficie ſe abaixa, deſpeja mais do que recebe, e o exceſſo produz a depreſſaõ.

479 Póde ſuccéder que hum rio ſe deſpeje cahindo de certa altura, como ſe vê nas catadupas. Entaõ a deſcarga ſe faz livremente, e ceſſando na queda a reſiſtencia do fundo e das margens, a agua diminue no volume e aumenta na velocidade; acceleraçaõ, que ſe communica á agua ſuperior, e que lhe faz inclinar mais a ſuperficie ao horizonte. Mas como os rios, que tem o fundo ſuſceptivel de excavaçaõ, naõ admittem catadupas, ordinariamente ſe ajunta a ſuperficie do rio com a da reſerva em que ſe deſpeja, de maneira que as duas ſuperficies ſe pódem conſiderar como dous planos, que ſe cortaõ no lugar da embocadura. Eſta interſecçaõ varîa de lugar, conforme o rio leva mais ou menos agua, mas a mudança naõ paſſa de certos limites; e póde tomar-ſe hum termo me-

dio

dio entre as ſuas excurſões por interſecçaõ conſtante das duas ſuperficies.

Tudo iſto he applicavel aos rios, que ſe lançaõ em alagoas, ou em outros rios. Os que entraõ em hum mar ſujeito a marés tem alguma differença. A enchente repreza as aguas do rio, e as faz ſubir até certa altura, as quais tornaõ no tempo da vaſante á ſua direcçaõ primitiva. Aſſim anda a interſecçaõ das duas ſuperficies ſempre em movimento, e naõ póde attribuir-ſe-lhe lugar fixo.

480 A agua de hum rio, que entra em outro, experimenta huma reſiſtencia, que naõ he facil de avaliar exactamente. Sejaõ *A B C D*, *E C G F* (Fig. 137.) dous rios que ſe unem em *C M N*; e imaginemos, por hum momento, em *C N* hum muro que ſepare as duas maſſas de agua. He evidente, que a preſſaõ contra o muro he igual de ambas as partes; e conſeguintemente, que as duas maſſas naõ obraõ entre ſi, ſenaõ em virtude das ſuas velocidades de translaçaõ. Deſta percuſſaõ deve naſcer huma velocidade, cuja direcçaõ dividirá o angulo *D C E* em partes iguais ou deſiguais, conforme os rios ſe encontrarem com forças iguais ou deſiguais. Alguns autores tem procurado determinações exactas deſtes movimentos, pelas leis da percuſſaõ dos fluidos; mas elles ſaõ taõ complicados em ſi meſmos, e taõ alterados por differentes circunſtancias phyſicas, que naõ poderáõ ſer jamais reduzidos a formulas, ſenaõ de hum modo muito imperfeito.

481 Diminuindo a declividade dos rios á medida que ſe chegaõ para o mar, o fundo ſe faz ſenſivelmente horizontal, e a agua corre para os lugares que lhe offerecem mais facilidade, aumentando em ſuperficie, e diminuindo em altura; e aſſim ſe forma nas embocaduras huma eſpecie de banco, ou barra, onde a agua tem pouca altura. Havendo marés, a enchente tende a tranſportar para cima a terra que forma a barra, e o rio na vaſante tende a reſtituilla ao primeiro eſtado, até que o conflicto das duas correntes contrarias faz tomar ao fundo do rio huma forma permanente, propria para eſtabelecer huma eſpecie de equilibrio entre os effeitos reciprocos que ellas produzem.

Na Fig. 138, que he hum perfil do rio e do mar, tomado ao longo do rio, a curva *D E F* repreſenta o fundo

do do rio *A B E D*, e do mar *C B E F*, ſendo *E* o ponto mais alto da barra. Póde *B E* conſiderar-ſe como huma abertura, por onde paſſaõ ſucceſſivamente as duas correntes que havemos dito. Eſta abertura toma a altura conveniente ás forças que a eſtabelecem, e tem por elementos principais das ſuas dimenſões, a quantidade da agua do rio, a ſua velocidade, e a elevaçaõ da preamar.

482 Ainda que os depoſitos das materias trazidas pela agua pódem produzir algumas mudanças na figura e dimenſões da barra, naõ ſaõ com tudo as cauſas primordiais della, como ordinariamente ſe penſa. Quando as aguas foſſem perfeitamente puras, ſempre na embocadura ſe formaria huma eſpecie de banco mais ou menos ſenſivel, da maneira e pela raſaõ que havemos expoſto. Tambem as areias tranſportadas pelos ventos formaõ algumas vezes grandes aterros ou dunas nas embocaduras, que fazem mudar a corrente dos rios, e a poſiçaõ das barras.

483 Ha hum famoſo banco na embocadura do Adur abaixo de Bayona. Para o deſtruir ou diminuir, muitas vezes ſe tem mudado a corrente do rio por meio de marachões obliquos, que naõ tiveraõ effeito perduravel, até que em fim ſe determinou em 1729 encanallo deſde a aldeia *Boucau* até o mar entre dous longos diques de alvenaria, que foraõ logo principiados, e que ainda ſe naõ acabáraõ. Eſta obra interrompida e continuada por varias vezes, naõ tem chegado até o preſente (1769) ſenaõ a produzir 6 até 7 pés de altura na baixamar. Como a preamar ſobe de 11 até 12 pés, a barra tem 18 pés de altura neſte ponto, a qual ſeria baſtante para receber grandes embarcações, ſe foſſe bem franca. Mas como na entrada das barras naõ ſe póde eſperar o ponto juſto da preamar, e como ſe deve abater alguma couſa em raſaõ das ondas, naõ ſe deve contar mais que por 12 pés de altura na preamar, a qual naõ he baſtante, e ainda ſe procura aumentar.

He certo, que o melhor meio de o conſeguir he encerrar o rio entre dous diques rectilineos, que ſe produzaõ hum pouco avante pelo mar dentro; porque aumentando-ſe a velocidade do rio combate mais ventajoſamente a corrente contraria do mar, e o fundo toma a fórma *D H e*, tranſportando-ſe o ponto *E* para *e* onde lhe correſponde a altura

altura *C e* maior que *B E*. Seria conveniente, que deſcendo para o mar diminuiſſe a largura do canal, porque aſſim aumentaria a agua do rio no tempo da vaſante cada vez mais em velocidade e profundidade, e a do mar pelo contrario no tempo da enchente diminuiria cada vez mais. Huma precauçaõ eſſencial neſtas obras he levar os diques ſempre emparelhados, ou eſtabelecer huma eſpecie de equilibrio entre as ſuas partes correſpondentes. Por falta deſta advertencia, as obras que ſe fazem de huma banda lançaõ a agua para a outra, e formaõ entulhos, que depois he neceſſario tirar com grandes deſpezas, para formar o dique oppoſto.

As meſmas obſervaçoens ſe applicaõ, guardada a proporçaõ, á embocadura de dous rios, que ſaõ ſujeitos a encher e diminuir em tempos differentes, como ſuccede de ordinario. Na ſua embocadura ſe fórma huma eſpecie de fluxo e refluxo, que produz effeitos ſemelhantes aos do mar.

484 Suppondo hum mar izento de marés, ou preſcindindo dellas, os rios que nelle entraõ no tempo das cheias levantaõ-ſe menos na embocadura do que nas partes diſtantes. Porque a agua de hum rio na embocadura naõ ſe levanta acima do livel da ſuperficie do mar, e eſta naõ ſe eleva ſenaõ inſenſivelmente pela agua que recebe do rio afluente. Aſſim deve a ſuperficie do rio no tempo das cheias formar com o prolongamento da ſuperficie do mar hum angulo maior. Quando pois ſe vê, que hum rio creſce huma certa quantidade nas vezinhanças da foz, póde concluir-ſe que tem creſcido muito mais ſenſivelmente nas partes ſuperiores.

485 Daqui ſe entenderá a raſaõ de hum phenomeno aſſaz notavel. Hum pequeno rio deſagua em outro maior, que conſerva a meſma quantidade de agua ou o meſmo livel, e que entra pela foz do primeiro, de ſorte que a agua ſe acha como eſtagnada no rio pequeno por hum largo eſpaço deſde a ſua embocadura. De repente ha huma grande cheia no pequeno rio; e ſem embargo a ſuperficie da agua na vezinhança da foz naõ ſe levanta mais do que antes. Porque a agua ſe eleva entaõ nas partes ſuperiores do pequeno rio, e dando impulſo á da vezinhança da embocadura accelera a ſua velocidade.

486 Suppondo agora que hum rio tem ſempre a meſma

quantidade de agua, a ſua velocidade ſerá retardada, e a agua ſubirá a maior altura na vezinhança da foz do que nas partes ſuperiores, quando a maré encher. Porque ſendo *BR* (Fig. 139.) a ſuperficie do mar, e e *BF* a embocadura do rio, eſtá claro que ſe a ſuperficie *BR* ſe levantar para *AT*, a agua do mar reſiſtirá ao movimento do rio, e a ſuperficie delle *EB* ſe levantará no ponto *D* onde encontra a ſuperficie do mar *TAM*, e tomará conſeguintemente a poſiçaõ *EK*. E como a reacçaõ do mar naõ paſſa de certa extenſaõ, e ſe pelo ponto *M* onde a horizontal *TAM* encontra o fundo do rio ſe conduzir a ſecçaõ *ME* perpendicular á direcçaõ da corrente, o ponto *E*, quando menos, eſtá fóra deſta reacçaõ; he viſivel, que a ſuperficie *EK* eſtá mais elevada na ſecçaõ *KDG* do que em qualquer outra entre os pontos *E*, K, e com mais forte raſaõ adiante do ponto E.

487 Igualmente ſe vê, que á medida que ſe elevar a ſuperficie *AT*, o ponto *K* ſe elevará tambem, e correrá mais para dentro do rio. Eſte ponto K naõ deve conſiderar-ſe em todos os caſos como a interſecçaõ de duas linhas. Algumas vezes a ſuperficie do mar he muitos pés mais elevada que a do rio, e toma hum movimento muito conſideravel por elle acima, como ſuccede no Sena até muitas leguas acima de Ruaõ. O meſmo, guardada a proporçaõ, ſe obſerva na embocadura de dous rios confluentes, quando hum delles enche ſem o outro encher ao meſmo tempo, e na meſma proporçaõ.

488 Quando dous rios ſe unem, e naõ formaõ mais que hum ſó, a largura do *compoſto* he ſempre menor que a ſoma das larguras dos rios *ſimples* antes da uniaõ; porque a ſuperficie, que reſiſte á corrente do rio compoſto, he neceſſariamente menor que a ſoma das ſuperficies, que reſiſtiaõ á corrente dos rios ſimples. Suppondo pois que a velocidade junto ás margens he a meſma em ambos os caſos, a veia da agua ſerá mais rapida no rio compoſto, e as materias eſtranhas conduzidas pela agua ſe depoſitaráõ nas margens. Donde ſe ſegue que a madre ſe eſtreitará e profundará proporcionalmente; e aſſim reſultará maior altura de agua, e conſeguintemente maior velocidade. Tudo iſto he conſtante pela experiencia. Vemos muitos rios, principalmente quando tem pouca declividade, receber outros ſem parecerem aumentar ſenſivelmente de volume; mas a velocidade ſe faz maior,

489

489 Aſſim como dous rios, que ſe ajuntaõ, podem ter, e tem ordinariamente quantidades de agua, declividades, e velocidades muito differentes; do meſmo modo, quando hum rio ſe divide em muitos braços, eſtes teraõ quantidades de agua, declividades, e velocidades differentes, conforme as circunſtancias. Naõ he pois de admirar, que quando hum rio ſe divide na ponta de huma ilha, os dous braços ſe naõ conſervem ſempre no meſmo livel. Cada livel particular póde abaixar-ſe, ou elevar-ſe a reſpeito dos outros, conforme a agua pela ſua quantidade e declividade achar mais ou menos facilidade na corrente.

490 Em 1760 appareceu hum pequeno Tratado ſobre a corrente dos rios, cujo autor pertende que he indifferente, quanto á altura de hum rio, aumentar ou diminuir o ſeu volume, porque a velocidade creſce, ao ſeu entender, proporcionalmente ás quantidades da agua. E daqui combate rijamente o uſo ordinario de ſangrar hum rio, com o fim de o fazer abaixar, e prevenir as inundaçoens, que póde cauſar nos campos vezinhos.

491 Eſte ſyſtema, que tem enganado algumas peſſoas, deve reduzir-ſe aos limites que permitte a verdade, os quais ſaõ muito eſtreitos. A hypotheſe em que ſe funda, que *as velocidades creſcem como as quantidades da agua*, naõ he exacta (n.435.). He certo, que aumentando-ſe a quantidade da agua tambem ſe aumenta a velocidade, naõ porém na meſma raſaõ. Nos rios que tem pouca declividade, cujo livel he ſenſivelmente o meſmo que o do mar, como ſuccede na vezinhança da embocadura, naõ ſe fará abaixar o livel ſenſivelmente, ainda que elles ſe repartaõ em muitos braços. Seja por exemplo, o rio *AB* (Fig. 140.), cujo livel he o meſmo que o do mar *GHEF*. Eſtá claro, que fazendo as novas aberturas *CF*, *DE*, as aguas naõ abaixaráõ por iſſo na parte *ACD*, ou ao menos naõ abaixaráõ ſenaõ na raſaõ da ſoma das ſuperficies *CF*, *DE* para a ſoma das ſuperficies *AB*, *GHEF*, que he huma quantidade inſenſivel. Donde concluiremos, que as ſangrias feitas em hum rio perto da embocadura, ou em geral em todo o rio que tem pouca declividade, devem produzir ordinariamente ventagens pouco conſideraveis. Mas ſe o rio tiver huma declividade e velocidade ſenſivel, he ſem duvida que creſcendo a quantidade de agua, tambem creſce a altura; e reciprocamente, que póde abaixar-ſe conſideravelmente de livel, por meio das ſangrias.

492 Algumas vezes he neceſſario derivar certa quantidade de agua de hum rio, e quer-ſe ſaber, quanto elle ha de diminuir de altura, porque he de pouco cabedal, e naõ ſe lhe quer tirar a qualidade de navegavel. Eiſaqui a ſoluçaõ, primeiramente na hypotheſe de que o rio, e o canal de derivaçaõ ambos ſaõ rectangulares.

493 Seja *ABCD* (Fig. 141.) a ſecçaõ horizontal do rio, *EFHG* a do canal, e ſupponhamos que o rectangulo *MOPN* (Fig. 142.) repreſenta a ſecçaõ vertical e latitudinal do rio, ſendo *MN* o livel da agua antes da exiſtencia do canal de derivaçaõ, e *VX* depois de ſer eſtabelecido o dito canal, cuja ſecçaõ vertical e latitudinal repreſentamos pelo rectangulo *SQRT*. He evidente, que a ſoma das quantidades de agua que paſſaõ em hum tempo dado t pelas duas aberturas *VOPX*, *SQRT* deve ſer igual á que paſſava no meſmo tempo pela abertura *MOPN*. Aſſim fazendo $MO = H$, $OP = c$, $SQ = H'$, $QR = c'$, preſcindindo dos obſtaculos, e ſuppondo que a velocidade na ſuperficie da corrente he como inſenſivel, e conſeguintemente que a velocidade em cada ponto da profundidade he devida á altura correſpondente da agua, ſerá a quantidade de agua que paſſa pela abertura $VOPX = \frac{4}{3} t c H' \sqrt{a H'}$ (n. 245.), a que paſſa por $SQRT = \frac{4}{3} t c' H' \sqrt{a H'}$, e a que paſſava por $MOPN = \frac{4}{3} t c H \sqrt{a H}$. Logo teremos

$$c H' \sqrt{H'} + c' H' \sqrt{H'} = c H \sqrt{H}.$$

E porque a quantidade de agua, que deve ſer derivada no tempo t, ſe ſuppoem dada, deſignando-a por q, teremos $q = \frac{4}{3} c' t H' \sqrt{a H'}$; e combinando eſta equaçaõ com a precedente, acharemos as duas incognitas H', c' pelas duas equaçoens ſeguintes

$$H' = \sqrt[3]{\frac{(4 t c H \sqrt{a H} - 3 q)^2}{16 t^2 c^2 a}},$$

$$c' = \frac{3 c q}{4 t c H \sqrt{a H} - 3 q}.$$

Aſſim

Aſſim conheceremos a largura e profundidade do canal de derivaçaõ; e juntamente a quantidade $H - H'$ que o livel do rio ſe ha de abaixar.

494 O problema ſeria igualmente facil de ſe reſolver, ſe naõ ſuppuzeſſemos que a velocidade de cada fio da corrente era devida á altura que lhe correſponde, mas fixaſſemos a altura media da meſma corrente, como fizemos no n.º 463. Deixamos eſte calculo ao Leitor.

495 Como os rios naõ tem já mais a fórma rectangular, a ſoluçaõ precedente naõ he applicavel á practica, ſenaõ por meio de algumas operaçoens preliminares, as quais ſerá conveniente que indiquemos aqui. Seja em geral *MFGHIKN* (Fig. 143.) a ſecçaõ vertical e latitudinal de hum rio. Havendo dividido a largura *MN* em grande numero de partes iguais *MA*, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EN*, medir-ſe-haõ com a ſonda as alturas correſpondentes *AF*, *BG*, *CH*, *DI*, *EK*. Entaõ conſiderando os pequenos arcos *MF*, *FG*, *GH* &c como linhas rectas, e a ſecçaõ como hum polygono rectilineo, a area delle ſerá $= (AF + BG + CH + DI + EK)\ MA$, iſto he, igual ao producto da ſoma das profundidades multiplicada por hum dos intervallos iguais da largura. Dividindo eſte producto pela largura inteira *MN*, ſuppondo que a vertical *MO* repreſenta o quociente, e acabando o rectangulo *MOPN*, a area delle ſerá igual á do polygono. Iſto poſto, poderemos na practica, ſem receio de erro attendivel, conſiderar o rectangulo *MOPN* como a ſecçaõ do rio; e ſuppondo que pela derivaçaõ o livel deſte rectangulo ſe abaixa até *VX*, a ſecçaõ real do rio depois da derivaçaõ ſerá o polygono *mFGHIKn*, e o abatimento do livel ſerá *MV* ſenſivelmente. Do meſmo modo ſe praticaria com o canal de derivaçaõ, ſe elle naõ houveſſe de ſer rectangular.

O meſmo methodo ſe póde applicar ao problema, que acima reſolvemos n.º 460, e ſeg.

CAPI-

CAPITULO VII.

Da percuſſaõ dos fluidos.

496 QUando hum fluido em movimento encontra hum corpo, ou obſtaculo, neceſſariamente emprega contra elle certa quantidade de força; porque as particulas do fluido ſaõ tambem pequenos corpos, que multiplicados pela ſua velocidade compoem huma quantidade determinada de movimento. Se o fluido eſtiver em quietaçaõ, e vier hum corpo a encontrallo com certa velocidade, a *reſiſtencia* que o fluido lhe deve oppor ſerá igual á *percuſſaõ* que exercitaria contra elle, ſe o fluido ſe moveſſe com a velocidade do corpo, e eſte eſtiveſſe em quietaçaõ. Iſto he evidente por ſi meſmo. A percuſſaõ, e a reſiſtencia dos fluidos ſeguem pois as meſmas leis, e medem-ſe do meſmo modo.

497 Todos ſabem a diſtinçaõ das forças mortas, e vivas. As primeiras ſaõ ſimples preſſões, que naõ produzem velocidade actual finita, ſenaõ depois de haverem obrado por hum tempo finito; e as outras, que tambem ſe chamaõ forças de percuſſaõ, produzem huma velocidade finita, e actual, e podem conſiderar-ſe como ſomas de infinitas preſſões accumuladas. He evidente, que toda a força de preſſaõ póde medir-ſe por hum pezo, porque o pezo naõ he outra couſa, ſenaõ huma maſſa ſujeita á acçaõ da gravidade, a qual he huma força de preſſaõ. Quanto ás forças de percuſſaõ, ſuppondo-ſe que produzem o ſeu effeito em hum inſtante, ſeraõ infinitas em comparaçaõ das preſſões, e naõ poderáõ medir-ſe por pezo algum. Mas naõ ſe entende, como a força de hum corpo, que he huma quantidade finita, póde em hum inſtante produzir hum effeito finito, iſto he, imprimir em outro corpo huma quantidade determinada de movimento. Toda a communicaçaõ de movimento ſe faz em hum tempo finito, ainda que ſeja de huma brevidade inperceptivel aos noſſos ſentidos. Podemos pois conſiderar em geral as forças de percuſſaõ obrando por degraos como as da preſſaõ, e naõ produzindo o ſeu effeito ſenaõ em hum tempo finito, ainda que ſummamente breve. Entaõ podem medir-ſe por pezos; porque a gravidade applicada a hum corpo por

hum

hum tempo finito produz huma força viva capaz de fazer equilibrio a outra força viva ; e aſſim quando hum fluido fére qualquer corpo , a percuſſaõ que exercita contra elle he ſempre reductivel a hum certo pezo.

498 He muito difficultoſo determinar as leis da percuſſaõ dos fluidos de hum modo exacto , e applicavel á practica. Até agora naõ ſe tem achado huma theorica , que ſatisfaça perfeitamente neſta parte. A que ſe ſegue ordinariamente , e que tem a ventagem de ſer muito ſimples , ſuppoem que o fluido he compoſto a cada inſtante na direcçaõ do ſeu movimento de huma infinidade de fios parallelos , cada hum dos quais dá o ſeu golpe , ſem ſe embaraçarem huns aos outros ; o que naõ póde ter lugar em rigor , e em certos caſos conduz a reſultados muito diſtantes da verdade , para ſe poderem admittir. Dous motivos com tudo me obrigaõ a expôr aqui eſta theorica. O primeiro , porque facilitará aos Leitores a intelligencia de muitas obras de Architectura Naval , ás quais ſerve de fundamento. O ſegundo , porque póde ſervir , ſem erro attendivel, no calculo das maquinas, que ſe movem por meio de rodas , impellidas pela aceaõ da agua , ou do ar ; objecto importante , que principalmente temos em viſta neſte lugar. Porém depois de a expormos , referiremos varias experiencias , pelas quais ſe verá em que caſos póde a dita theorica ſer admittida , ou deve ſer abſolutamente rejeitada.

Theorica ordinaria da percuſſaõ dos fluidos.

499 *SE o meſmo fluido MXGN* (Fig. 144.) , *cujas particulas ſe movem todas com igual velocidade , ferir perpendicularmente os dous planos AB , AR , as forças das impulſões ſeraõ entre ſi na raſaõ dos meſmos planos.*

Porque , movendo-ſe todas as moleculas do fluido pelas direcções *IK* , *OR* &c perpendiculares aos planos propoſtos , a impulſaõ ſobre *AB* he para a impulſaõ ſobre *AR* , como o producto do numero das moleculas , que ferem *AB*, multiplicado pela ſua velocidade , para o producto do numero das moleculas, que ferem no meſmo tempo *AR* , multiplicado pela velocidade. Porém as maſſas que ferem

ferem os dous planos em tempos iguais ſaõ dous priſmas, que tem por baſe os meſmos planos, e por altura commua a velocidade do fluido. Logo a impulſaõ contra AB he para a impulſaõ contra AR, como o plano AB para o plano AR.

500 *Se dous fluidos da meſma eſpecie* $MXZN$ (Fig. 144.), *e* $EGHF$ (Fig. 145.) *movidos com differentes velocidades, ferirem perpendicularmente os dous planos* AB, CD *em quietaçaõ, as forças das impreſſões ſeraõ entre ſi como os planos multiplicados pelos quadrados das velocidades dos fluidos.*

Porque ſuppondo a impulſaõ contra $AB = F$, contra $CD = f$, a maſſa que fere $AB = M$, a que fere $CD = m$, a velocidade da primeira $= V$, a da ſegunda $= u$, teremos $F : f :: MV : mu$. Porém as maſſas M, m da meſma eſpecie ſaõ entre ſi na raſaõ dos volumes, e os volumes na raſaõ compoſta das baſes AB, CD e das velocidades V, u que repreſentaõ as alturas; logo $M : m :: AB.V : CD.u$, e por conſeguinte $MV : mu :: AB.V^2 : CD.u^2$. Mas temos $F : f :: MV : mu$; logo $F : f :: AB.V^2 : CD.u^2$.

501 Deve notar-ſe, que ſe os fluidos naõ foſſem da meſma eſpecie, a raſaõ das denſidades deveria entrar na raſaõ das maſſas. *Entaõ as percuſſões ſeraõ na raſaõ compoſta dos planos, das denſidades dos fluidos, e dos quadrados das velocidades dos meſmos fluidos.*

502 Note-ſe tambem, que todas as moleculas do meſmo fluido ſe ſuppoem animadas da meſma velocidade. Se aſſim naõ for, deverá tomar-ſe a velocidade *media*, como ſe foſſe a de todo o fluido.

503 Se os planos AB, CD ſe moverem uniformemente, ſendo ſempre perpendiculares ás direcções dos fluidos, he igualmente facil de achar a raſaõ das impreſſões.

Supponhamos, que em hum tempo dado o plano AB com a ſua velocidade uniforme, e primitiva chegaria a ab, e o plano CD com a ſua a cd, de maneira que ſejaõ as ſuas velocidades repreſentadas por KT, PQ; e por VT, LQ, as velocidades contemporaneas dos dous fluidos. He facil de ver, que as impreſſões ſobre os planos AB, CD ſeraõ como ſe elles eſtiveſſem em quietaçaõ, e os fluidos vieſſem a encontrallos ſomente com as velocidades VK, LP, porque os planos ſe ſubtrahem á percuſſaõ com as velo-

velocidades KT, PQ. Deſignando pois a velocidade VT por V, KT por V', LQ por u, PQ por u', e as impulſões por F, f; teremos $F:f::AB\,(V-V')^2:CD\,(u-u')^2$.

Do meſmo modo ſe vê, que ſe os planos em lugar de fugir directamente os fluidos, vieſſem a encontrallos com as velocidades V', u', teriamos $F:f::AB\,(V+V')^2:CD\,(u+u')^2$. Aſſim reunindo os dous caſos, ſerá $F:f::AB\,(V\mp V')^2:CD\,(u\mp u')^2$.

504 Póde ſucceder, que hum dos planos, por exemplo AB, eſteja em quietaçaõ. Entaõ $V'=0$, e a proporçaõ ſe reduzirá a $F:f::AB.V^2:CD\,(u\mp u')^2$; donde ſe tira $f=\frac{F.CD.(u\mp u')^2}{AB.V^2}$, formula que ſervirá para comparar a impulſaõ perpendicular ſobre hum plano, que ſe move, com a impulſaõ perpendicular ſobre outro, que eſtá em quietaçaõ.

505 *Se o fluido $MXZN$* (Fig. 144.) *ferir perpendicularmente o plano AB em quietaçaõ, e o fluido $EGHF$* (Fig. 146.) *obliquamente o plano CD tambem em quietaçaõ, a impulſaõ ſobre o primeiro ſerá para a que reſulta perpendicularmente ſobre o ſegundo na raſaõ compoſta dos planos, dos quadrados das velocidades dos fluidos, e da raſaõ do quadrado do raio para o quadrado do ſeno do angulo de incidencia RCD.*

Porque ſendo a impulſaõ ſobre $AB=F$, ſobre $CD=f$, a velocidade do fluido $MXZN=V$, de $EGHF=u$, a maſſa que fere $AB=M$, a que fere $CD=m$, a ſua velocidade perpendicular a $CD=u'$, o ſeno total $=R$, e o ſeno do angulo $RCD=p$, teremos primeiramente $F:f::MV:mu'$. E porque, conduzindo a recta DR perpendicular á direcçaõ do fluido CR, he evidente que o numero das moleculas que ferem DC he o meſmo que o das que ferem DR, teremos $M:m::AB.V:DR.u::AB.V:CD.\frac{p}{R}.u::AB.V.R:CD.u.p$. Além diſto, ſuppondo que $ny=u$ repreſenta a velocidade do fluido $EGHF$, e reſolvendo-a em duas, huma $nt=u'$ perpendicular ao plano, e a outra nr que lhe he parallela, e que naõ contribue nada para a percuſſaõ, teremos $u':u::ry:ny::p:R$, e

u^2

$u' = u \cdot \frac{p}{R}$. Logo ſerá $MV : mu' :: AB.V^2 . R : CD.$ $u^2 . \frac{p^2}{R} :: AB.V^2.R^2 : CD.u^2.p^2$, e conſeguintemente $F : f :: AB.V^2.R^2 : CD.u^2.p^2$.

506 Quando as velocidades V, u ſaõ iguais, temos ſimpleſmente $F : f :: AB.R^2 : CD.p^2$, iſto he, *ſaõ as forças na raſaõ compoſta da raſaõ dos planos, e da raſaõ do quadrado do raio para o quadrado do ſeno do angulo da incidencia.*

507 Deſignando a ſuperficie AB por A, CD por B, e ſuppondo hum terceiro plano C que ſeja ferido obliquamente por outro fluido com a velocidade v debaixo de hum angulo de incidencia, cujo ſeno ſeja $= q$, e deſignando por Φ a força que reſulta perpendicularmente ao dito plano, teremos

$$F : f :: A.V^2.R^2 : B.u^2.p^2,$$
$$\Phi : F :: C.v^2.q^2 : A.V^2.R^2;$$

e multiplicando por ordem eſtas duas proporções, reſultará $\Phi : f :: C.v^2.q^2 : B.u^2.p^2$. Donde ſe ſegue, que *as percuſſões obliquas ſaõ entre ſi na raſaõ compoſta dos planos, dos quadrados das velocidades, e dos quadrados dos ſenos dos angulos de incidencia.*

508 Supponhamos agora, que eſtando o plano AB (Fig. 144.) em deſcanço, quando he ferido perpendicularmente pelo fluido, o plano CD (Fig. 147.) ſe move parallelamente a ſi meſmo por qualquer direcçaõ Cc ou Dd, quando he ferido obliquamente pelo fluido. Tomando ſobre a direcçaõ do fluido a recta LQ para repreſentar a ſua velocidade, e reſolvendo-a em outras duas, huma LI igual e parallela a Cc, e a outra LK, eſtá claro que a velocidade LK he a unica, pela qual o fluido obra contra o plano, e que a percuſſaõ ſerá como ſe o plano CD eſtiveſſe em quietaçaõ, e o fluido vieſſe a ferillo pela direcaaõ RLK com a velocidade LK. Logo deſignando eſta velocidade por v, o ſeno do angulo RLD por m, e a força que reſulta perpendicularmente ao plano CD por f, teremos $F : f :: AB.V^2.R^2 : CD.v^2.m^2$ (n.505.).

509 Agora do ponto K abaixe-ſe KT perpendicular a LQ; e fazendo a velocidade $LQ = u$, a velocidade LI ou $KQ = u'$, o ſeno do angulo KQT ou $QLI = n$, o ſeu coſeno $= p$, o ſeno do angulo $QLC = q$, e o ſeu coſe-

coſeno $= r$, ſerá $KT = \frac{nu'}{R}$, $QT = \frac{pu'}{R}$, $LT = u - \frac{pu'}{R}$. E porque o angulo KLC he a differença dos angulos QLC, QLK, teremos $m = q\frac{LT}{LK} - r\frac{KT}{LK} = \frac{q}{v}\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{r}{v}\cdot\frac{nu'}{R}$. Logo $m^2v^2 = \left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$; e ſubſtituindo eſte valor na propoſçaõ do nº precedente, ſerá finalmente $F : f :: AB.V^2 . R^2 : CD\left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$.

510 Havendo-ſe aſſim apprendido a comparar entre ſi as differentes eſpecies de percuſſões dos fluidos, naõ he neceſſario mais que conhecer a medida abſoluta de huma dellas, para concluir a de todas as outras. Como a percuſſaõ perpendicular contra hum plano immovel he a mais ſimples de todas, he muito natural o tomalla aqui por unidade fundamental. Eſta he conhecida pela Taboa ſeguinte, que tiramos de M. Bouguer (*Manœuvre des Vaiſſeaux pag.* 185.).

Por meio della, e da theorica precedente, póde determinar-ſe a impulſaõ da agua ſobre huma ſuperficie plana *dada*, conhecendo-ſe o angulo da incidencia, a velocidade da agua, e a da meſma ſuperficie no caſo de naõ eſtar em quietaçaõ ao tempo que he ferida pela agua. Quanto ás impulſões dos outros fluidos, tambem ſe acharáõ, conhecendo-ſe a raſaõ das ſuas denſidades com a da agua. Suppondo, por exemplo, que a denſidade do ar he $\frac{1}{850}$ da denſidade da agua, ſe dividirmos cada huma das impulſões da Taboa por 850, teremos as impulſões correſpondentes do vento.

Impul-

Impulſões da agua ſobre a ſuperficie plana de hum pé quadrado, ferida perpendicularmente.

Velocidade em hum ſegundo	Impulſoens		Velocidade em hum ſegundo	Impulſoens	
Pés	*Libr.*	*onç.*	*Pés*	*Libr.*	*onç.*
1	1	3	13	203	0
2	4	13	14	235	0
3	10	12	15	270	0
4	19	3	16	300	0
5	30	0	17	334	0
6	43	0	18	389	0
7	59	0	19	434	0
8	75	0	20	480	0
9	97	0	21	529	0
10	120	0	22	580	0
11	145	0	23	635	0
12	172	0	24	688	0

Para moſtrar o uſo da theorica, faremos algumas applicações gerais nos Exemplos ſeguintes.

511 Exemplo I. *Sendo o triangulo iſoſceles A C B* (Fig. 148.) *expoſto á percuſſaõ de hum fluido, cuja direcçaõ he perpendicular á baſe A B, determinar a raſaõ entre a impulſaõ que ha de receber parallelamente á ſua altura C D, e a impulſaõ directa que receberia perpendicularmente ſobre a baſe A B.*

Deſignando por F a impulſaõ directa contra AD ou DB, e por f a impulſaõ que reſulta perpendicularmente ſobre AC ou CB, temos $F : f :: AD . R^2 : AC . ſen\ ACD^a$ (n.506.), ou $F : f :: AD . AC^2 : AC . AD^2 :: AC : AD$, e por conſeguinte $f = \frac{F . AD}{AC}$. Repreſentando eſta força pelas rectas RF, rf, e reſolvendo cada huma dellas em duas

duas huma RE ou re parallela a CD, e a outra RH ou rb parallela a AB, he evidente que as forças RH, rb iguais e contrarias ſaõ deſtruidas, e que as forças RE, re conſtituem o effeito total da impulſaõ parallelamente a CD. Porém deſignando qualquer das forças RE ou re por φ, teremos $f : \varphi :: RF : RE :: AC : AD$, e $\varphi = \frac{f \cdot AD}{AC}$. Logo, ſubſtituindo o valor de f, ſerá $\varphi = \frac{F \cdot AD^2}{AC^2}$, e conſeguintemente $\varphi : F :: AD^2 : AC^2$, ou $2\varphi : 2F :: AD^2 : AC^2$. Donde ſe vê, que *a impulſaõ recebida pelo triangulo parallelamente á ſua altura he para a impulſaõ directa que receberia na baſe, como o quadrado da ametade da baſe para o quadrado de hum dos lados.*

512 Quando o triangulo iſoſceles he rectangulo, a impulſaõ que recebe parallelamente á altura he ametade da que receberia directamente a ſua baſe, porque neſſe caſo temos $AD^2 : AC^2 :: 1 : 2$.

513 Se hum quadrado receber o fluido na direcçaõ da diagonal CM (Fig. 149.), e depois perpendicularmente a hum dos lados, a primeira impulſaõ ſerá para a ſegunda como 1 para $\sqrt{2}$, ou como 7 para 10 proximamente. Porque deſignando a primeira por M, a ſegunda por A, e a impulſaõ directa que receberia AB por B, teremos

$$M : B :: AD^2 : AC^2 :: 1 : 2 \text{ (n.512.)},$$
$$B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1 \text{ (n.499.)};$$

e multiplicando eſtas proporçõeſ por ordem, ſerá $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

514 Exemplo II. *Sendo a ſemicircumferencia AQB (Fig. 150.) expoſta á percuſſaõ de hum fluido, cuja direcçaõ he perpendicular ao diametro AB, determinar a raſaõ entre a impulſaõ que ha de receber parallelamente a QC, e a impulſaõ directa que receberia o diametro AB.*

Havendo dividido AQB em huma infinidade de elementos Ff, Ll &c pelas rectas FL, fl parallelas ao diametro, e conduzido as ordenadas FS, fs &c, ſe deſignarmos por F a impulſaõ directa que receberia FR ou Ss, e por φ a impulſaõ que recebe o elemento Ff paralel-

ralellamente a $Q C$, teremos $\Phi = \frac{F \cdot F R^2}{F f^2}$ (n. 511.); e porque os triangulos ſemelhantes $FR f, F S C$ daõ $\frac{F R^2}{F f^2} = \frac{F S^2}{C F^2}$, ſerá $\Phi = \frac{F \cdot F S^2}{C F^2}$. Fazendo pois $C S = x$, $C F = r$; e deſignando F por $S s$ ou $d x$, ſerá a impreſſaõ Φ ſobre o elemento propoſto $= \frac{d x (r^2 - x^2)}{r^2}$. Integrando, e tomando o valor quando $x = r$, teremos a impulſaõ ſobre $Q A$ parallelamente a $Q C = \frac{2}{3} r$, e conſeguintemente ſobre $B Q A = \frac{2}{3} A B$. Donde ſe vê, que ſendo a impulſaõ directa contra $A B$ repreſentada pela meſma linha $A B$, a impulſaõ ſobre a ſemicircumferencia $B Q A$ he repreſentada por $\frac{2}{3} A B$; e conſeguintemente, que eſtas impulſões ſaõ entre ſi na raſaõ de 3 para 2.

515 Segue-ſe daqui que a impulſaõ recebida por hum cylindro vertical ſituado no meio de huma corrente he $\frac{2}{3}$ da que receberia o parallelepipedo rectangulo circunſcrito, expoſto por huma das faces perpendicularmente á direcçaõ da meſma corrente; porque o ſemicylindro anterior, e a face correſpondente do parallelepipedo ſaõ as unicas partes, que recebem a percuſſaõ do fluido.

516 Exemplo III. *Suppondo que $A Q B$ (Fig. 150.) repreſenta hum hemiſferio produzido pela revoluçaõ do quarto de circulo $A Q C$ ao redor de $Q C$, e que eſtá expoſto á corrente de hum fluido, que corre ſegundo a direcçaõ $Q C$, determinar a raſaõ entre a impreſſaõ que reſulta parallelamente a $Q C$, e a impulſaõ directa que receberia o circulo da baſe produzido pela revoluçaõ do raio $C A$.*

Temos viſto, que repreſentando por $d x$ a impulſaõ directa ſobre o elemento $S s$, a impulſaõ do elemento $F f$ parallelamente a $Q C$ he repreſentada por $\frac{d x (r^2 - x^2)}{r^2}$

(n.

(n. 514.). Deſignando a raſaõ da circumferencia ao raio por c, e multiplicando ambas as expreſſões por $2cx$, he evidente que as impulſões ſobre a zona circular deſcrita pelo elemento Ss, e ſobre a zona eſferica deſcrita pelo elemento Ff ſeraõ repreſentadas, a primeira por $2cx\,dx$, e a ſegunda por $\frac{2cx\,dx\,(r^2-x^2)}{r^2}$. Integrando ambas as expreſſões, e fazendo $x=r$, ſerá a impulſaõ total ſobre a baſe repreſentada por cr^2, e ſobre o hemiſferio por $\frac{1}{2}cr^2$. Donde ſe ſegue, que *a impulſaõ recebida pelo hemiſferio parallelamente a QC he a ametade da impulſaõ directa que receberia o circulo maximo, que lhe ſerve de baſe.*

517 He manifeſto, que o outro hemiſferio naõ receberia impulſaõ alguma da parte do fluido; e aſſim he indifferente expor á corrente de hum fluido huma eſfera, ou ſomente hum hemiſferio, com tanto que neſte ultimo caſo a direcçaõ da corrente ſeja perpendicular ao circulo maximo que lhe ſerve de baſe. No nº. 105 fizemos uſo deſta propoſiçaõ.

518 Exemplo IV. *Sendo o plano CD* (Fig. 151.) *expoſto obliquamente á corrente de hum fluido, e ſendo por alguma cauſa exterior neceſſitado a mover-ſe parallelamente a ſi meſmo por huma direcçaõ dada Cc, pergunta-ſe o angulo pelo qual ſe deve fazer a percuſſaõ, para que o fluido imprima no meſmo plano a maior quantidade de movimento que he poſſivel pela direcçaõ Cc.*

Tomando LQ para repreſentar a velocidade do fluido, e reſolvendo-a em duas, huma LI igual e parallela á velocidade do plano Cc, e a outra LK; em virtude deſta reſultará perpendicularmente a CD huma impulſaõ proporcional a $CD.LK^2.\mathit{ſen}\,CLK^2$ (n. 508.). Repreſentemos eſta força por LA, e reſolvamo-la em outras duas, huma LH parallela, e a outra LZ perpendicular á direcçaõ dada Cc. He evidente, que naõ tendo o plano liberdade para ſe mover ſenaõ pela direcçaõ Cc, a força LH he a unica que ſe deve attender, e que deve ſer hum *maximo*. Porém temos $LH=LA.\mathit{ſen}\,LAH$; logo ſubſtituindo o valor de LA, e advertindo que $LAH=CLN$, ſerá $LH=CD.LK^2.\mathit{ſen}\,CLN.\mathit{ſen}\,CLK^2$. Neſta expreſſaõ CD he conſtante, e porque LQ, LI, e o angulo

gulo QLI ſaõ conſtantes, tambem LK, e o angulo KLN ſeráõ conſtantes. Fazendo pois $KLN = p$, $CLK = x$, teremos $LH = CD \cdot LK^2 \, sen(p - x) \, sen\, x^2$; e a queſtaõ ſe reduzirá a fazer que $sen(p - x) \, sen\, x^2$ ſeja hum *maximo*. Logo ſerá $2\, cos\, x \, sen(p - x) - sen\, x \, cos(p - x) = 0$, ou $2\, sen\, p \, cos\, x^2 - 3\, cos\, p \, sen\, x \, cos\, x - sen\, p \, sen\, x^2 = 0$, ou $tang\, x^2 + 3\, cot\, p \, tang\, x - 2 = 0$; donde ſe tira

$$tang\, x = -\frac{3}{2}\, cot\, p + \sqrt{\left(\frac{9}{4}\, cot\, p^2 + 2\right)};$$

519 Por quanto $2\, cos\, x^2 - sen\, x^2 = \frac{1 + 3\, cos.\, 2x}{2}$, e $sen\, x \, cos\, x = \frac{sen\, 2x}{2}$, a equaçaõ $2\, sen\, p \, cos\, x^2 - 3\, cos\, p \, sen\, x \, cos\, x - sen\, p \, sen\, x^2 = 0$, póde reduzir-ſe a eſta fórma $\frac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x} = \frac{sen\, p}{cos\, p}$, que offerece a conſtrucçaõ ſeguinte.

Com o raio arbitrario LK (Fig. 152.) deſcreva-ſe hum arco de circulo KV, faça-ſe o angulo $KLX = p$, produza-ſe KL, tome-ſe $LR = \frac{KL}{3}$, pelo ponto R tire-ſe RV parallela a LX, e pelo ponto V o raio VL. Entaõ divida-ſe o angulo VLK em duas partes iguais pela recta LM, e ſerá $KLM = x$. Porque abaixando dos pontos X, V as perpendiculares XE, VH ao raio KL, os triangulos ſemelhantes XEL, VHR daraõ $\frac{VH}{RA} = \frac{XE}{LE}$, ou $\frac{VH}{RH} = \frac{sen\, p}{cos\, p}$; porém fazendo $KLV = 2x$, temos $\frac{VH}{RH} = \frac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x}$; logo $\frac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x} = \frac{sen\, p}{cos\, p}$.

520 Quando o plano CD eſtá em quietaçaõ (Fig. 151.) no tempo em que he ferido pela corrente, ſendo ſempre ſujeito a mover-ſe pela direcçaõ dada Cc; a velocidade inicial delle LI he nulla, a velocidade LK coincide com

LQ,

LQ, e a ſoluçaõ fica ſendo a meſma, ſó com a differença de pôr o angulo CLQ em lugar de CLK.

521 Daqui ſe ſegue a determinaçaõ do angulo mais ventajoſo, que deve fazer a direcçaõ do vento com a vela de hum moinho de vento, quando ella eſtá em quietaçaõ ao momento que começa a ſer impellida, ou quando a velocidade do vento ſe póde conſiderar como infinita em comparaçaõ da velocidade da meſma vela. O eixo horizontal em que eſtaõ poſtas as velas anda em roda, e poem-ſe ſempre na direcçaõ do vento, ſuppoſta horizontal. Qualquer das velas ſuppoem-ſe como hum rectangulo vertical, ſituado obliquamente a reſpeito do eixo, a fim de que a impulſaõ do vento poſſa reſolver-ſe em duas, huma parallela ao eixo que ſeja deſtruida, e a outra ſituada em hum plano perpendicular ao meſmo eixo, a qual he a que produz a rotaçaõ. Para determinar pois a poſiçaõ mais ventajoſa da vela neſte caſo, deveremos naõ ſómente fazer $LI = o$, mas tambem ſuppor Cc perpendicular á direcçaõ OL do fluido. Aſſim teremos $p = 90°$, e as formulas precedentes daraõ $tang\ x = \sqrt{2}$, ou $cof\ 2x = -\frac{1}{3}$, iſto he, $x = 54° 44'$.

522 A hypotheſe geral de que o plano CD tem huma velocidade inicial finita LI, quando he ferido pelo fluido, póde dar alguma idéa da poſiçaõ mais ventajoſa das velas, quando a ſua velocidade he comparavel com a do vento, como ſuccede ſempre na practica. Neſte caſo deve o angulo ſer maior que $54° 44'$. Mas para o determinar com rigor, he neceſſario advertir que os differentes pontos da meſma vela eſtando a differentes diſtancias do eixo tem differentes velocidades de rotaçaõ, de que ſe deve ter conta no calculo; e que a velocidade póde ſer tal, que ſendo a parte inferior da vela ferida pelo vento, a ſuperior pelo contrario exercite huma impulſaõ contra elle, e neſſe caſo naõ deve tomar-ſe a ſoma, mas a differença das impulſoens. Todas eſtas condiçoens complicaõ o problema, e fazem o calculo muito prolixo. Veja-ſe *o Tratado das Fluxoens* de Maclaurin nº 910 e ſeg. o *Tratado dos Fluidos* de M. d'Alembert da nova ediçaõ pag. 397, e o tom. V dos *Opuſculos Math.* p. 148 e ſeg. M. Euler nas indagaçoens profundas deſta materia (*Nouv. Mem. de Petersb. tom. IV*) determina naõ ſómente a poſiçaõ que deve ter huma vela, e a velo-

locidade que deve tomar, para que a maquina produza o maior effeito, mas tambem examina a queſtaõ no caſo das velas ſerem curvas, e determina em geral a melhor figura dellas, ou o angulo pelo qual a ſuperficie de huma vela deveria ſer cortada em cada ponto pela direcçaõ do vento &c.

Experiencias e Reflexoens ſobre a percuſſaõ dos fluidos.

523 A Theorica, que temos expoſto, he ſujeita a algumas difficuldades. Suppoem-ſe, que todas as moleculas do fluido ferem a ſuperficie do corpo, como ſe foſſem livres, e inſuladas; e para iſſo cada huma, depois de haver dado o ſeu golpe, deveria aniquilar-ſe, a fim de naõ embaraçar as outras. Mas no eſtado real das couſas, as moleculas centrais ſaõ impellidas pelas que vem a traz dellas, e haõ de buſcar ſahida para os lados. Donde reſulta, que a columna fluida correſpondente ao plano deve alargar-ſe até huma certa diſtancia delle, e que a percuſſaõ naõ póde ſer calculada, como ſe o plano recebeſſe effectivamente a impulſaõ de todos os fios fluidos parallelos, que lhe correſpondem. Mas naõ poderia ſer, que as impulſoens foſſem ſemelhantemente alteradas, e que guardaſſem entre ſi a meſma proporçaõ que as theoricas, ao menos ſenſivelmente? ſobre iſſo conſultaremos a experiencia, examinando 1.º qual he a medida da percuſſaõ perpendicular; 2.º ſe as percuſſoens perpendiculares com a meſma velocidade ſaõ proporcionais ás ſuperficies; 3.º ſe as percuſſoens perpendiculares contra ſuperficies iguais ſaõ proporcionais aos quadrados das velocidades; 4.º ſe as percuſſoens obliquas, ſendo as mais couſas iguais, ſaõ proporcionais aos quadrados dos ſenos dos angulos de incidencia.

524 As Figuras 153, 154, 155 repreſentaõ a balança de que nos havemos ſervido para iſſo. O traveſſaõ *AB* he de 3 pés e meio, e pela parte ſuperior cortado em fio, para que ſe naõ ajunte agua ſobre elle. Em huma das extremidades tem huma chapa de cobre bem plana e polida de 2 pollegadas e meia de diametro, cuja ſuperficie ſuperior produzida paſſaria pelo eixo do movimento da balança, e cujo centro *A* correſpondia ao eixo *TA* de hum pequeno tubo addicional

cional e vertical *PQqp*, pelo qual a agua ſahia, e vinha ferir a chapa. O ſemicirculo graduado *MON* guarnecido de hum prumo ſervia para pôr a balança horizontal, ou com huma inclinaçaõ dada.

525 Conſervando pois a agua na altura conſtante *TA* de 4 pés, e deixando huma pollegada de intervallo entre o centro *A* da chapa e a extremidade do tubo, para dar á agua a liberdade de ſahir livremente, obſervámos

I. Que ſendo o diametro do tubo *pq* de 10 linhas, o pezo *S* que fazia equilibrio á percuſſaõ perpendicular da agua (Fig. 153.) era de 1 libr. 5 onç. 7 oit. e 8 gr. ou de 12608 graõs.

II. E que conſervando o meſmo tubo, e inclinando a balança de maneira que o angulo *TAB* foſſe de 60° (Fig. 155.), o pezo que fazia equilibrio á percuſſaõ obliqua era de 12248 graõs.

III. Que ſendo o diametro *pq* de 6 linhas, a percuſſaõ perpendicular era de 4484 graõs.

IV. E que conſervando o meſmo tubo, a percuſſaõ obliqua pelo angulo *TAB* de 60° fazia equilibrio a 4315 graõs.

526 Depois conſervando a agua da reſerva na altura conſtante de 2 pés, e deixando ſempre huma pollegada de intervallo entre o ponto *A* e a extremidade do tubo, achámos

V. Que ſendo o diametro *pq* de 10 linhas, a percuſſaõ perpendicular era de 6306 graõs.

VI. E que conſervando o meſmo tubo, a impulſaõ obliqua pelo angulo *TAB* de 60° era de 6125 graõs.

VII. Que ſendo o diametro *pq* de 6 linhas, a impulſaõ perpendicular era de 2243 graõs.

VIII. E que conſervando o meſmo tubo, a impulſaõ obliqua pelo angulo *TAB* de 60° era de 2158 graõs.

527 Alguns autores pertendem, que a percuſſaõ perpendicular ſobre hum plano he igual ao pezo de huma columna do meſmo fluido, que tenha por baſe a ſuperficie do plano, e por altura a meſma que he devida á velocidade do fluido; e outros, que ſeja o dobro deſta quantidade. Vejamos, qual deſtes ſentimentos he mais bem fundado.

Por quanto o producto theorico de hum orificio he para o producto effectivo de hum tubo addiccional do meſmo diametro na raſaõ de 16 para 13 (n. 295.), as velocidades do fluido ao ſahir delles ſeraõ na meſma raſaõ, e con-

ſeguintemente as alturas que lhes ſaõ devidas na raſaõ de $(16)^2$ para $(13)^2$, ou proximamente de 3 para 2. Será pois a velocidade no ponto A das noſſas experiencias devida a $\frac{2}{3}$ da altura TA; e aſſim ſuppondo que o pé cubico de agua peza 70 libras, acharemos nas experiencias I e V que as colunnas que tem a baſe circular de 10 linhas de diametro e as alturas $\frac{8}{3}$ e $\frac{4}{3}$ de hum pé tem os pezos de 6518 e 3259 graõs, e nas experiencias III e VII que as colunnas que tem a baſe de 6 linhas de diametro e as alturas de $\frac{8}{3}$ e $\frac{4}{3}$ de hum pé tem os pezos de 2346 e 1173 graõs.

Comparando pois eſtes reſultados com os das quatro experiencias citadas, veremos que o primeiro ſentimento ſobre a medida da percuſſaõ dos fluidos he abſolutamente erroneo, e que o ſegundo naõ ſe aparta muito da verdade. Com tudo parece, que entaõ ſe ſuppoem a força maior do que he na realidade.

Obſervámos porém, que chegando a chapa a tocar o orificio pq, e ſendo todas as mais couſas iguais, a percuſſaõ era ſenſivelmente menor do que quando ſe deixava hum certo intervallo entre a chapa e o orificio, para que a agua adquiriſſe toda a plenitude da velocidade, de que era ſuſceptivel. No primeiro caſo era a percuſſaõ directa com pouca differença igual ao pezo da colunna de agua, que tinha a baſe igual ao orificio, e a altura igual á da reſerva acima do orificio. Tal vez que os autores do primeiro ſentimento fizeſſem deſte modo as experiencias, em que ſe fundáraõ.

528 Pela comparaçaõ da experiencia I com a III, e da V com a VII, ſe vê que as percuſſoens directas ſaõ ſenſivelmente proporcionais ás ſuperficies, ſendo as velocidades iguais. Com tudo ſempre he bom obſervar, que a percuſſaõ parece aumentar ou diminuir em raſaõ maior que a ſuperficie, ou porque o deſvio das moleculas he realmente mais ſenſivel, e á proporçaõ diminue mais o impulſo ſobre huma ſuperficie pequena do que ſobre huma grande, ou porque a velocidade do fluido nas experiencias diminue algu-

alguma couſa em virtude da fricçaõ quando o orificio he menor, ou por ambas as cauſas juntamente. Na pratica porém julgo, que ſem erro conſideravel ſe póde ſuppor, como a theorica preſcreve (n. 499.), que ſendo a velocidade conſtante a percuſſaõ directa de hum fluido ſobre as ſuperficies planas he na raſaõ das meſmas ſuperficies.

529. Comparando a experiencia I com a V, e a III com a VII, tambem ſe vê que as percuſſões directas contra huma meſma ſuperficie ſaõ entre ſi como as alturas da reſerva acima dos centros de percuſſaõ, ou (que vem a ſer o meſmo) como os quadrados das velocidades. Niſto concorda a experiencia ſenſivelmente com a theorica (n. 500.).

530 Quando a agua fere obliquamente o plano, como nas experiencias II, IV, VI, e VIII, conforme a theorica reſulta huma força perpendicular á ſuperficie, a qual he repreſentada por $\frac{F.B.p^2}{A.R^2}$ (n. 506.), ſendo R o ſeno total, p o ſeno do angulo TAB, A a parte da chapa que correſponde ao orificio quando a balança eſtá horizontal, F a impulſaõ directa que entaõ recebe, e B a parte da meſma chapa que a agua fere obliquamente. Eſta força deve conſiderar-ſe applicada ao braço CA, e o pezo S ao braço CL. Logo teremos $\frac{F.B.p^2}{A.R^2} \cdot CA = S.CL$. Porém $CL = CB.\frac{p}{R} = CA.\frac{p}{R}$, e pela theorica das projecções temos $B = A.\frac{R}{p}$. Logo, ſubſtituindo eſtes valores na equaçaõ precedente, ſerá $S = F$. Pela theorica pois o meſmo pezo S deveria fazer equilibrio á impulſaõ da agua, ou eſtiveſſe a balança horizontal, ou fizeſſe qualquer angulo com o horizonte. As experiencias citadas ſaõ contrarias a eſte reſultado, pois o pezo diminue á medida que dimiuue o angulo TAB. Donde concluiremos, que a reſpeito do modo com que entraõ os ſenos dos angulos de incidencia nas expreſſões das impulſões directa e obliqua comparadas entre ſi, a theorica naõ concorda com a experiencia.

He verdade que na percuſſaõ directa tem as moleculas menos

menos liberdade de ſahirem da chapa depois de haverem dado o ſeu golpe, do que na percuſſaõ obliqua; e que aſſim deve no primeiro caſo ajuntar-ſe ſobre a chapa huma pequena quantidade de agua que pelo ſeu pezo aumente hum pouco a percuſſaõ. Mas eſta cauſa he muito pequena, para ſe lhe attribuirem as differenças obſervadas.

531 Segue-ſe pois deſtas diſcuſſões, que as percuſſões perpendiculares dos fluidos contra as ſuperficies planas guardaõ entre ſi ſenſivelmente as proporções eſtabelecidas pela theorica. Naõ ſuccede porém o meſmo nas percuſſões obliquas contra as ſuperficies planas, nem conſeguintemente contra as ſuperficies curvas, as quais ſe podem conſiderar como compoſtas de huma infinidade de ſuperficies planas elementares expoſtas á corrente debaixo de obliquidades differentes.

Ha de dizer-ſe ſem duvida, que as minhas experiencias foraõ feitas muito em pequeno, para ſerem deciſivas. Eu naõ as dou por taes. Mas devo advertir, que ellas ſaõ muito difficeis de ſe fazerem em grande com exactidaõ; que as minhas tem a ventagem de ſerem directas, pois tenho medido immediatamente a percuſſaõ, ſem empregar movimento algum de rotaçaõ, e ſem haver frieçaõ, ou reſiſtencia alguma, que conſiderar e deduzir; e que em fim ſaõ ſuſceptiveis de grande preciſaõ. M. de Borda (Mem. de l' Acad. 1763 e 1767.) fez varias experiencias ſobre eſta materia, e dos ſeus reſultados conclue igualmente que a theorica ordinaria da percuſſaõ dos fluidos he erronea, e que ſeria inutil, e ainda perigoſo applicalla á conſtrucçaõ dos navios.

Mas naõ baſta dèſtruir, he neceſſario edificar, ſendo poſſivel. Se o methodo propoſto ſe engeita, que ſe ha de pôr em ſeu lugar? Eſta he huma difficuldade, que naõ ſe tem vencido até o preſente, ſem embargo dos eſforços que niſſo tem empregado os maiores Geometras. Eiſaqui huma idea geral das tentativas, que ſe tem publicado ſobre eſte aſſunto.

532 M. Newton (*Princip Math. L. II. Sect. VII.*) toma a queſtaõ em differentes pontos de viſta, conforme a differença dos fluidos. Primeiramente ſuppoem hum fluido raro, compoſto de partes iguais, e ſituadas livremente em diſtancias iguais; e moſtra (como no n.º 516.)

516.) que ſe hum globo e hum cylindro de diametros iguais ſe moverem nelle com velocidades iguais, a reſiſtencia do globo ſerá a ametade da reſiſtencia do cylindro. Eſtabelecida eſta propoſiçaõ, buſca a reſiſtencia abſoluta que o globo experimenta, ou as partes do meio ſejaõ elaſticas, ou naõ; e no primeiro caſo acha que a reſiſtencia do globo he para a força, pela qual o movimento total delle póde ſer produzido ou deſtruido, no tempo que gaſtaria em correr os dous terços do ſeu diametro com a ſua velocidade uniformemente continuada, como a denſidade do meio para a denſidade do globo; e no ſegundo, que a reſiſtencia he duas vezes menor.

Examina depois a reſiſtencia nos meios continuos, como ſaõ a agua, o mercurio &c., nos quais o globo naõ fere immediatamente todas as partes reſiſtentes do fluido, mas communica ſomente ás partes vezinhas huma impulſaõ, que ellas tranſmettem ſucceſſivamente de humas a outras. Conforme a theorica que deduz, fundada em muitas propoſições, que naõ ſaõ ſuſceptiveis de extracto, a reſiſtencia do globo he a meſma que a do cylindro circunſcrito; reſultado inteiramente contrario á experiencia, e donde ſe deve concluir, ſem ir mais longe, que a theorica he fundada ſobre principios erroneos.

533 M. Daniel Bernoulli no ſegundo volume das Memorias antigas da Academia de Petersburg determina a reſiſtencia dos fluidos por hum methodo, que depois abandonou por achar os reſultados contrarios á experiencia. Mas no volume oitavo das meſmas Memorias propoem outro methodo muito ingenhoſo e elegante, para determinar a percuſſaõ perpendicular de huma veia fluida, que ſahe de hum vaſo contra huma ſuperficie plana. Obſerva, que ſuppondo-ſe o plano de certa extenſaõ os fios de que a veia ſe compoem acabaõ em tomar direcçoens parallelas ao meſmo plano. Conſidera a curva deſcrita por cada hum dos fios, como hum canal, no qual ſe move hum corpo, o qual experimenta conſequintemente em cada ponto a força centrifuga, e que o Autor ſuppoem alem diſſo ſujeito á acçaõ de huma força tangencial, variavel por qualquer lei. Calcula todas eſtas forças; e acha, que deve reſultar parallelamente ao eixo da veia, ou perpendicularmente ao plano, huma impulſaõ igual ao peſo de hum cylindro fluido, que tenha por baſe a ſecçaõ primiti-

va

va da veia, e por altura o dobro da altura devida á velocidade do fluido, como he proximamente conforme á experiencia (n. 527.).

Eſte methodo difficilmente ſe applicaria ás percuſſões obliquas; e naõ póde ter lugar para medir a reſiſtencia dos corpos, que ſe movem dentro dos fluidos, nos quaes eſtaõ mergulhados.

534 M. d' Alembert no ſeu *Enſaio ſobre a reſiſtencia dos fluidos*, determina as leis da reſiſtencia pelas do equilibrio; e eſte methodo, que he inteiramente novo, tem de mais a ventagem de ſer muito directo. Suppoem primeiramente hum corpo ſuſtentado em quietaçaõ por huma cauſa exterior, no meio de hum fluido em movimento. Os fios do fluido, que topaõ no corpo, ſe dobraõ por differentes direcções; e a porçaõ que cobre a parte anterior do corpo fica como eſtagnante até huma certa extenſaõ. A preſſaõ que o corpo experimenta, ou a reſiſtencia que oppoem ao movimento das particulas, he produzida pela perda que ellas fazem das ſuas velocidades; porque hum corpo naõ obra contra outro, ſenaõ em quanto lhe communica, ou tende a communicar huma parte do ſeu movimento. Aſſim ſe reduz a queſtaõ a achar primeiramente a velocidade do fluido, que corre immediatamente ſobre a ſuperficie do corpo, e o Autor a determina por dous methodos differentes. Sendo achada eſta velocidade, por ella ſe determina a formula rigoroſa da preſſaõ. O que falta, he acabar eſte calculo, e deduzir reſultados applicaveis á pratica; mas iſſo he o que ſe naõ póde conſeguir, tratando a queſtaõ geralmente, e ſem deſprezar nenhum dos elementos que lhe ſaõ eſſenciais.

O Autor determina pelo ſeu methodo hum pouco modificado, e menos rigoroſo, a accaõ de huma veia fluida que fere perpendicularmente hum plano; e acha que he hum pouco menor que o pezo do cylindro, que tem por baſe a ſecçaõ primitiva da veia, e por altura o dobro da altura devida á velocidade do fluido, reſultado que ſe conforma proximamente com a experiencia (n. 527.).

535 M. Euler movido da ſimplicidade dos principios, e reſultados da theorica ordinaria, e ſuppondo por outra parte que a impulſaõ de hum fluido contra hum corpo naõ he mais que a preſſaõ experimentada por elle da parte dos fios do fluido, que correm ao longo da ſua ſuperficie,

cie, combina os dous methodos entre ſi (*Mem. de l' Acad. de Petersb. 1763.*), e fórma hum methodo miſto, que julga proprio para determinar a reſiſtencia dos fluidos de hum modo ſimples, e exacto em muitas occaſiões. Eiſaqui brevemente em que conſiſte.

536 Seja $AMBN$ (Fig. 156.) hum corpo em quietaçaõ, expoſto á corrente de hum fluido; e para maior ſimplicidade, ſupponhamos que he dividido pelo eixo AB ſituado na direcçaõ do fluido em duas partes iguais e ſemelhantes AMB, ANB, e conſideremos ſomente a parte AMB, porque o meſmo ſe entenderá da outra. O fluido he compoſto de fios, que pelo encontro da parte anterior do corpo ſe dobraõ, e formaõ as curvas $fgqe$, $f'g'q'e'$. Seja Mm hum elemento da curva AE, e repreſentemos por v a altura devida á velocidade actual do fluido em M, e por k a altura devida á velocidade que teria naturalmente no meſmo ponto, ſe o corpo lhe naõ oppuzeſſe obſtaculo. Pela idea que temos dado da preſſaõ dos fluidos em movimento (n. 437.) ſerá a preſſaõ que padece o elemento Mm repreſentada por $Mm.(k-v)$. Por outra parte, conduzindo MR parallela a AB, fazendo o raio $= 1$, e o angulo $mMR = \Phi$, teremos pela theorica ordinaria (n. 505.) a impulſaõ que reſulta em Mm perpendicularmente $= Mm.k\,ſen\,\Phi^2$. Logo igualando os dous valores, ſera $Mm(k-v) = Mm.k.ſen\,\Phi^2$, ou $v = k - k\,ſen\,\Phi^2 = k\,coſ\,\Phi^2$; e conſeguintemente $\sqrt{v} = coſ\,\Phi.\sqrt{k}$. Aſſim, he a velocidade do fluido em M para a velocidade primitiva e naõ alterada, como o coſeno do angulo que faz a tangente em M com o eixo AB he para o ſeno total. Logo no ponto E, onde a tangente ſe faz parallela ao eixo, a velocidade do fluido ſerá igual á velocidade primitiva. Aſſim ſe determinará k, medindo a velocidade actual do fluido no dito ponto E; e dahi ſe conhecerá de hum modo commodo na pratica a velocidade correſpondente a qualquer ponto M, e a preſſaõ $Mm(k-v)$ que padece o elemento Mm.

537 Eſte methodo, como advertio o meſmo Autor, naõ ſe deve applicar á parte poſterior do corpo ESB, mas ſomente á anterior AME. Porque he evidente, que ſuppondo que o fluido ao longo de EB tem a meſma velocidade que ao longo de AE, o corpo ſeria igualmen-

te impellido pelas direcções oppoſtas *AB*, *BA*, e conſeguintemente naõ receberia movimento algum da parte do fluido; o que naõ póde jámais ter lugar.

Mas he mais de advertir, que a difficuldade referida ſempre ſubſiſtirá, de qualquer maneira que ſe determinem as velocidades dos fios do fluido. Ella carrega ſobre o principio meſmo, que a acçaõ de hum fluido contra hum corpo expoſto á ſua corrente provenha da preſſaõ do meſmo fluido. Se iſto aſſim he, ſegue-ſe que todas as vezes que a figura do corpo for tal, que os fios do fluido tenhaõ a meſma velocidade na parte poſterior que na anterior (o que póde ſucceder em muitos caſos), o fluido naõ poderá imprimir no corpo movimento algum; reſultado inadmiſſivel. Parece pois, que alem da preſſaõ ha no fluido huma perda de movimento, que paſſa ao corpo expoſto á corrente delle.

538 Que devemos em fim concluir de tudo iſto? que a theorica da reſiſtencia dos fluidos ainda eſtá imperfeita nos ſeus principios e fundamentos, e que naõ ſe póde fazer applicavel ſeguramente á pratica, ſenaõ quando ſe fundar ſobre experiencias em grande, multiplicadas, e bem feitas. Em quanto ſe naõ executar eſte trabalho penoſo e delicado, o melhor partido que talvez ſe póde tomar na pratica he uſar da theorica ordinaria, quando naõ ha neceſſidade de grande exacçaõ nos reſultados, e quando a percuſſaõ he ſobre ſuperficies planas, por angulos que naõ ſejaõ muito pequenos.

CAPITULO VIII.

Do melhor modo de empregar a acçaõ de hum fluido para mover huma maquina.

539 DE todos os meios, que ſe podem applicar para fazer ſervir a acçaõ de huma corrente para mover qualquer maquina, o mais ſimples, mais commodo, e menos ſujeito a inconvenientes, he guarnecella de huma ou muitas rodas, que recebaõ a impulſaõ da agua, e que lha communiquem. He verdade, que ſe tem intentado neſtes ultimos tempos uſar da reacçaõ da agua para o meſmo fim, depois que M. Daniel Bernoulli obſervou que a agua ao ſahir de hum vaſo o repelle com certa

ta força, da qual calculou o effeito preciſo. M. Joaõ Alberto Euler, digno herdeiro do talento e ſciencia do ſeu illuſtre Pay, em huma Peça coroada pela Academia de Gottinga em 1754 propoem huma maquina movida pela reacçaõ da agua, a qual conforme os ſeus calculos he mais ventajoſa, do que ſe foſſe movida pela impulſaõ, ou pelo pezo da agua, que ſe emprega neſte effeito. Mas eſta maquina parece que deve encontrar muitas difficuldades na practica; e naõ ſei, que tenha ſido executada. Aqui nos limitaremos a indagar o effeito de huma roda hydraulica, ou ſeja movida pela impulſaõ, ou pelo pezo da agua; e procuraremos a forma, e dimenſões que deve ter, a fim de empregar com a maior economia poſſivel a força movente. Eſte objecto importante ſerá tratado de hum modo, que póde conſiderar-ſe novo em grande parte. Se contradigo alguns autores, naõ tenho outro fim que o de illuſtrar a verdade.

Theorica das rodas movidas pela impulſaõ da agua.

540 POſto que a theorica ordinaria da percuſſaõ dos fluidos he ſujeita a muitas difficuldades, como temos viſto, ſervirnos-hemos della aqui, porque as percuſſões de que tratamos naõ ſaõ ordinariamente muito obliquas, e porque neſſe caſo a theorica naõ ſe aparta muito da verdade. Mas ſempre depois ajuntaremos varias experiencias, que ſerviráõ de rectificar os reſultados, e de fixar a confiança que elles merecem.

Para que huma roda *AHLK* (Fig. 157.) poſſa girar pela impulſaõ de hum fluido, he neceſſario que ſeja guarnecida na circumferencia de *pennas AB*, *DE*, *KS* &c, as quais ſejaõ impellidas pelo fluido ſucceſſivamente. Eſtas pennas ſaõ ordinariamente huns rectangulos dirigidos ao centro *C*, cujas alturas ſaõ repreſentadas pelas rectas *AB*, *DE*, *KS* &c, e as larguras por outras rectas perpendiculares ao plano da roda. Digo *ordinariamente*, porque algumas vezes naõ ſaõ dirigidas ao centro, nem tem a forma rectangular, como veremos adiante.

541 He facil de entender, que a força de huma roda movida pelo impulſo da agua depende da poſiçaõ, numero,

mero, e grandeza das pennas, e da raſaõ que exiſte entre a ſua velocidade e a da corrente. Examinemos pois, como todos eſtes elementos concorrem para produzir a dita força, a fim de deſcobrirmos a combinaçaõ mais ventajoſa, que lhe póde dar toda a intenſaõ de que he ſuſceptivel.

542 Seja *XYTZ* (Fig. 157.) huma corrente horizontal, cujos pontos ſe movem todos com a meſma velocidade, e que faz andar a roda vertical *AHLK* guarnecida de pennas rectangulares *AB*, *DE*, *KS* &c dirigidas ao centro *C*; e ſupponhamos, que a roda levanta o pezo *Q* por meio da corda *Qgbf* que paſſa pela roldana fixa *g*, e ſe enroſca no cylindro ou tambor *fbd*. Nos primeiros inſtantes o movimento do pezo *Q* será accelerado, mas depois de tres ou quatro voltas da roda ſe fará uniforme. Entaõ a impulſaõ do fluido eſtará a cada inſtante em equilibrio com o pezo *Q* e com a reſiſtencia da fricçaõ. Donde ſe vê, que repreſentando a velocidade uniforme do pezo *Q* por *v*, o producto *Qv* deverá repreſentar o effeito real da maquina, feita a deducçaõ das reſiſtencias, que abſorbem continuamente huma parte da força movente.

543 Muito tempo ſe tem agitado a queſtaõ, ſe huma penna tem mais força para girar quando he ferida perpendicularmente, ou quando obliquamente. Para ſaber o que devemos ter ſobre eſte ponto, ſupponhamos a penna *AB* vertical, e conſeguintemente *DE* inclinada á corrente. Tomando ſobre *AB* dous pontos infinitamente vezinhos *R*, *r*, conduzaõ-ſe as horizontais *RM*, *rm*, que determinaõ ſobre *DE* o elemento *Mm* correſpondente a *Rr*. Comparando entre ſi o momento de impulſaõ que receberia o elemento *Rr*, ſe foſſe ferido livremente, ou ſe a penna *DE* que o encobre foſſe aniquilada, com o momento de impulſaõ que reſulta perpendicularmente ſobre o elemento *Mm*; he manifeſto, que a percuſſaõ ſobre cada ponto de *Rr* he maior que ſobre cada ponto de *Mm*; mas por outra parte *Rr* he menor que *Mm*, e o braço de alavanca *CR* de *Rr* he menor que o braço *CM* de *Mm*. A determinaçaõ exacta deſtes dous momentos he a que ſomente póde decidir qual delles he maior.

544 Supponhamos pois que *Mx* repreſenta o eſpaço corrido pelo fluido em hum inſtante, e que *Rt*, *My* repreſentaõ os eſpaços corridos pelos pontos *R*, *M* das duas pennas

nas no meſmo tempo. Tomando CM por ſeno total, e repreſentando a velocidade Mx por V, e Rt por u, ſerá a impulſaõ ſobre Rr repreſentada por $Rr.CM^2.(V-u)^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro da roda por $Rr.CM^2.(V-u)^2.CR$.

Para conhecer o momento de impulſaõ contra Mm, reſolvamos a velocidade Mx em outras duas, huma My igual á do ponto M e na meſma direcçaõ, a qual naõ obra conſeguintemente ſobre o elemento Mm, e a outra Mz. Em virtude deſta reſulta perpendicularmente a Mm a impulſaõ repreſentada por $Mm.Mz^2.ſen\,DMz^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro C por $Mm.Mz^2.ſen\,DMz^2.CM$. Ora os triangulos ſemelhantes Mnx, MRC daõ $xn=\frac{CR.Mx}{CM}=\frac{CR.V}{CM}$, e temos $zx=My=\frac{CM.Rt}{CR}=\frac{CM.u}{CR}$; logo $nz=nx-zx=\frac{CR.V}{CM}-\frac{CM.u}{CR}=\frac{CR}{CM}\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)$. Mas $ſen\,DMz=\frac{CM.nz}{Mz}$ (ſendo ſempre CM o ſeno total); e por conſeguinte $ſen\,DMz=\frac{CR}{Mz}\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)$. Logo, ſubſtituindo eſte valor na expreſſaõ do momento, teremos $Mm.Mz^2.ſen\,DMz^2.CM=Mm.CR^2.CM\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)^2$.

He pois o momento da impulſaõ contra Rr para o momento da impulſaõ contra Mm, como $Rr.CM(V-u)^2$ para $Mm.CR\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)^2$. E porque temos $Rr:Mm::CR:CM$, e conſeguintemente $Rr.CM=Mm.CR$, ſerá em fim o primeiro momento para o ſegundo como $(V-u)^2$ para $\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)^2$. Mas $\frac{CM^2}{CR^2}>1$, e conſeguintemente $\left(V-u\right)^2>\left(V-\frac{CM^2.u}{CR^2}\right)^2$. Logo o primeiro momento he ſempre maior que o ſegundo. O meſ-

meſmo raciocinio tem lugar em todos os outros elementos correſpondentes das partes finitas AO, VE; e aſſim concluiremos, que a penna vertical he mais ventajoſa que a inclinada.

545 Quando as pennas eſtaõ em quietaçaõ no momento em que ſaõ feridas pelo fluido, temos $u = o$; e neſſe caſo o momento de impulſaõ contra cada elemento de Rr he igual ao momento do elemento correſpondente Mm. Entaõ he indifferente, que o fluido fira a parte AO da penna vertical, ou a parte correſpondente da penna inclinada. Mas como a parte OB da penna vertical he ferida tambem pela corrente, bem ſe vê que ainda neſſe caſo he mais ventajoſa a ſituaçaõ vertical do que a inclinada.

546 Alguns autores tem eſtabelecido em geral a ventagem da penna vertical de hum modo erroneo. He certo, dizem elles, que ſe a penna DE tem entrado na agua quando AB eſtá ainda na vertical, a parte VE da primeira cubrirá a parte AO da ſegunda, que naõ ſerá ferida conſeguintemente ſenaõ na parte OB. He verdade, continuaõ, que eſta diminuiçaõ parece ſer reparada pela impulſaõ que recebe a parte VE maior que AO; mas a compenſaçaõ naõ he completa. Porque a percuſſaõ directa contra AO ou VI he para a percuſſaõ que reſulta perpendicularmente contra VE, como $VI.(\mathit{ſen\ tot.})^2$ para $VE.\mathit{ſen}\,VE\,I^2$, ou como $VI.VE^2$ para $VE.VI^2$, ou em fim como VE para VI. Donde concluem ſer neceſſario, que a extremidade E da penna DE (Fig. 158.) naõ toque a ſuperficie do fluido, ſenaõ quando a penna AB começa a deixar a ſituaçaõ vertical. Entaõ he facil de determinar o numero das pennas, que a roda deve ter. Porque no triangulo rectangulo EAC conhece-ſe o lado CA que he o raio da roda, e a hypothenuſa CE, porque he dada a altura da penna DE. Aſſim ſe conhecerá o arco DA; e dividindo por elle a circumferencia inteira da roda, o quociente dará o numero das pennas.

Os autores, de quem fallamos, calculáraõ aſſim, e com muito trabalho, longas taboadas do numero das pennas convenientes a cada roda, relativamente ao raio della, e á altura das pennas.

547 Todo eſte apparato de calculaçoens vem abaixo, 1.º porque naõ ſe teve conta com os differentes braços de alavanca da penna vertical e da inclinada. 2.º porque

ſe

ſe no caſo da Fig. 158, o momento da impulſaõ contra a penna vertical *AB* he o maior poſſivel; por outra parte quando a penna *DE* tiver tomado huma poſiçaõ tal, que o angulo *ECB* ſeja dividido pela vertical em partes iguais, o momento ſerá menor do que ſeria quando a roda tiveſſe maior numero de pennas; e fica incerto, ſe o momento *medio* no ſegundo caſo ſerá maior que no primeiro.

548 O meſmo paralogiſmo foi já advertido em huma Memoria ſobre as Maquinas Hydraulicas, impreſſa ha poucos annos. Mas o Autor della emprega tambem hum principio falſo, do qual concluio que o momento de impulſaõ contra a parte *VE* da penna inclinada *DE* (Fig. 157.) he ſempre igual ao momento contra a parte correſpondente *AO* da penna vertical; o que naõ he verdadeiro, ſenaõ quando a roda eſtá em quietaçaõ ao inſtante da percuſſaõ (n. 544. 545.). O modo que tem eſte Autor em medir a percuſſaõ de hum fluido contra hum plano movel, he defeituoſo. Reſolve a velocidade do plano em outras duas, huma parallela, e outra perpendicular á direcçaõ do fluido; e ſuppoem que o fluido naõ obra ſobre o plano, ſenaõ em virtude do exceſſo da ſua velocidade ſobre a primeira das duas precedentes, deſprezando inteiramente a ſegunda. Mas he evidente, que em virtude da velocidade que o plano tem perpendicularmente á direcçaõ do fluido, he repellido pela agua como ſe elle eſtiveſſe em quietaçaõ, e a agua vieſſe a ferillo com eſſa meſma velocidade; donde reſulta outra impulſaõ, que ſe combina com a primeira, e que o Autor deſprezou inadvertidamente. A ſua memoria contém por outra parte muitas couſas verdadeiras, e uteis.

549 Por quanto o momento da impulſaõ ſobre *VE* he igual ao momento ſobre *AO* (n. 545.), quando a roda eſtá em quietaçaõ no tempo que he ferida pelo fluido, ſegue-ſe que entaõ quanto maior for o numero das pennas tanto maior ſerá o momento; porque aſſim ſe diminue o angulo *ECB* comprehendido entre duas pennas vezinhas, e ſe aumenta o momento quando ellas ſe achaõ na poſiçaõ menos favoravel, que he quando o dito angulo he dividido pela vertical em duas partes iguais. Donde concluiremos, pela lei de continuidade, que ſe a roda andar com huma velocidade muito pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido, a ſua força ſe aumentará dando-lhe grande numero de pennas.

Em

Em rigor parece, que ſendo a roda immovel no inſtante da percuſſaõ, o numero mais ventajoſo das pennas deveria ſer infinito, e as ſuas extremidades formariaõ huma circumferencia de circulo *FBGO* (Fig. 159.). Entaõ a impulſaõ, que reſultará perpendicularmente ſobre cada elemento *KN* do arco *FBG*, ſerá dirigida ao centro *C*, e naõ produzirá movimento algum de rotaçaõ: donde ſe ſegue, que bem longe de receber entaõ o maior momento poſſivel de impulſaõ, naõ receberá nenhum. Eſta difficuldade ſe deſvanece, reflectindo que as pennas ſe conſideraõ no noſſo calculo, como huma ſerie de planos differentemente inclinados, todos dirigidos ao centro. A ſuppoſiçaõ de ſer *FBG* hum arco de circulo continuo, cujos elementos *KN* taõ longe eſtaõ de ſerem dirigidos ao centro, que ſaõ perpendiculares aos raios *CK*, he inteiramente contraria á precedente; e aſſim naõ he de admirar, que conduza a hum reſultado muito differente.

Além diſto, como os fios de agua ſaõ compoſtos de moleculas phyſicas, e tem conſeguintemente groſſuras finitas, as extremidades das pennas devem deixar entre ſi hum certo intervallo, que permitta ao fluido exercitar a ſua acçaõ quanto lhe he poſſivel. E por iſſo o numero das pennas que ſe deve dar a huma roda em quietaçaõ, e com mais forte raſaõ em movimento, he ſempre finito e limitado. Acceſce tambem, que multiplicando o numero das pennas, a roda ſe faz mais pezada, e ſujeita a maior frieçaõ.

550. Quando o movimento da roda chega ao eſtado uniforme, a ſua velocidade he ordinariamente muito comparavel com a do fluido; e entaõ he difficil de determinar o momento de impulſaõ da agua contra todas as pennas a qualquer inſtante, e de concluir o numero mais ventajoſo dellas. Adiante daremos a ſoluçaõ geometrica deſta queſtaõ. Aqui indicaremos hum meio indirecto, que he ſufficiente para o uſo ordinario.

Havendo fixado o raio da roda, a quantidade que as pennas devem mergulhar-ſe na agua, e a velocidade que ſe quer fazer tomar a hum ponto dado da roda em comparaçaõ da velocidade do fluido, ſupporemos que ella tem ſucceſſivamente differentes numeros de pennas; e determinaremos, para differentes poſiçoens da meſma roda, os momentos de impulſaõ da agua contra todas as partes mergulhadas

galhadas ao meſmo tempo. O numero de pennas, que der maior momento *medio* de impulſaõ ſerá o mais ventajoſo. Baſtará conſiderar tres poſiçoens de cada roda; quando huma penna *AB* (Fig. 157.) eſtá vertical; quando o angulo *BCe*, ametade do angulo *BCE* comprehendido por duas pennas vezinhas, he dividido pela vertical em duas partes iguais; e quando a recta *Ce* eſtiver vertical. Deſte modo, ſuppondo a velocidade do ponto *B* igual a hum terço da velocidade do fluido, $AB = \frac{1}{5} GB$, e conſeguintemente o arco *FBG* de 72°, achámos que convém dar 36 pennas á roda. Suppondo a velocidade do ponto *B* conſtante, ſerá neceſſario maior, ou menor numero de pennas, conforme o arco *FBG* for menor ou maior que 72°. Eſtes calculos ſaõ longos, e penoſos; e a experiencia he o caminho mais ſimples e expedito, para reſolver a queſtaõ.

551 Examinemos agora a raſaõ, que deve ter a largura com a altura das pennas. He evidente, que ſendo dado o raio exterior da roda *CB*, e a velocidade do fluido, o momento da impulſaõ contra á ſuperficie *dada* de huma penna ſerá tanto maior, quanto maior for o braço de alavanca, a que a impulſaõ ſe applicar. Eſte braço augmenta á medida que ſe aumenta a largura da penna, e ſe diminue proporcionalmente a ſua altura. Donde ſe ſegue, que he ventajoſo dar muita largura ás pennas, que ſe mergulhaõ em hum rio. Mas quando as rodas ſe movem por canais eſtreitos, ou por correntes, cuja agua ſe deve economizar, e empregar-ſe com a maior utilidade poſſivel, a couſa requer novas conſideraçoens.

552 Seja *ABKD* (Fig. 160.) a face vertical de huma reſerva, na qual ſe tem practicado a abertura rectangular *MNOP*, e repreſente *AB* o livel da agua. Supponhamos que á abertura *MNOP* eſtá applicado hum canal rectangular, que conduz a agua a ferir as pennas de huma roda; e porque he neceſſario para evitar a fricçaõ, que as pennas tenhaõ hum jogo livre no vaõ do canal, imaginemos que a parte de huma penna que recebe a percuſſaõ perpendicular he repreſentada pelo rectangulo *mnop*, cujos lados ſaõ parallelos aos do rectangulo *MNOP*, e diſtantes delles huma quantidade dada. Aſſim ſómente a agua,

que ſahe pela abertura $mnop$, he a que ſe emprega em mover a penna, perdendo-ſe a que ſahe pelos interſticios rectangulares Mp, No, Oz. Imaginemos agora, que a penna $mnop$ ſe transforma em outra $efgh$ tambem rectangular, e de igual ſuperficie; e que a abertura $MNOP$ ſe transforma em outra $EFGH$, de maneira que os interſticios Ee, Ff, Hi ſejaõ iguais reſpectivamente aos primeiros Mm, Nn, Pz. Suppondo que a quantidade que a reſerva póde fornecer he limitada, e *dada*, eſtá claro que o livel primitivo ſe abaixará até certa altura ab; e reſta ſaber, ſe em virtude deſta depreſſaõ diminuirá o momento de impulſaõ. O fundamento deſta duvida he, porque ſe perde mais agua quando o vazio Gi tem maior baſe GH, por ſer nelle maior a preſſaõ do que nos vazios laterais. Adiante daremos a ſoluçaõ directa e geometrica deſte problema. Aqui nos contentaremos de indicar o meio ſeguinte de apreciar o effeito da transformaçaõ propoſta em cada caſo particular.

553 Conduza-ſe a vertical TR, que divida cada huma das aberturas $MNOP$, $EFGH$ em duas partes iguais, e ſemelhantes; e ſupponhamos $TS = b$, $Sm = b$, $Sr = c$, $Mm = d$, $rR = e$, $tV = b'$, $Ve = p$, $Vr = q$, o tempo $= t$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$. Aſſim teremos $TR = b + c + e = H$, $SM = b + d = f$, $tR = b' + q + e$, $VE = p + d$. Iſto poſto, como a penna $efgh$ deve ſer igual a $mnop$, teremos primeiramente eſta equaçaõ $pq = bc$.

Depois, como a quantidade de agua que ſahe no tempo t pela abertura $SMPR$ he repreſentada por $\frac{4}{3} tf\left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{a}$ (n. 245.), e a que ſahe pela abertura $VEHR$ por $\frac{4}{3} t(p+d)\left((b'+q+e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{a}$, igualando entre ſi eſtas quantidades teremos eſta ſegunda equaçaõ, $f\left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) = (p+d)\left((b'+q+e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}} \right)$;

Dous

Donde ſe vê, que ſendo dada huma das tres quantidades b', p, q, as unicas que podem ſer deſconhecidas, viremos no conhecimento de todas tres. Quando for dada p, ou q, a equaçaõ ſerá do quarto gráo; e do quinto, ſe for dada b'. Eſtas equaçoens ſe reſolveráõ na practica pelos methodos conhecidos de approximaçaõ.

554 Havendo pois determinado pelas operaçoens indicadas o valor das linhas tV, Vr, Ve, ſerá facil de comparar o momento de impulſaõ contra a penna $mnop$ com o momento de impulſaõ contra $efgh$, e de julgar qual he mais ventajoſa. Porque, ſeja X o centro de impreſſaõ da penna $mnop$, iſto he, o ponto ao qual correſponderia a altura media do fluido, ſe elle ſahiſſe pelo orificio $mnop$, e Z o centro de impreſſaõ da penna $efgh$, determinado como X; e ſupponhamos que C he o centro da roda, e Cr o raio exterior. Entaõ, imaginando para maior ſimplicidade que a penna eſtá em quietaçaõ quando he ferida pelo fluido, e advertindo que a impulſaõ perpendicular ſobre huma ſuperficie plana he proporcional á meſma ſuperficie multiplicada pelo quadrado da velocidade, ou (que vem a ſer o meſmo) pela altura media do fluido, ſerá o momento de impulſaõ ſobre $mnop$ repreſentado por $mnop.TX.CX$, e ſobre $efgh$ por $efgh.tZ.CZ$. Aſſim teremos a raſaõ deſtes dous momentos, e pronunciaremos ſe ſe ganha ou perde alguma couſa em transformar a penna $mnop$ em $efgh$.

555 Paſſemos ao exame da velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que a maquina produza o maior effeito poſſivel.

O effeito da maquina he a quantidade de movimento impreſſo no pezo Q, que ella eleva uniformemente. Fazemos abſtracçaõ das reſiſtencias, ou ao menos ſuppomo-las comprehendidas no pezo Q. Aſſim, ſuppondo que o peso Q tem a velocidade uniforme v, he neceſſario combinar de tal maneira o pezo com a velocidade, que o producto Qv ſeja hum *maximo*. Quando todos os fios da agua ſe movem com igual velocidade, e a roda eſtá em quietaçaõ ao tempo que vem a ſer ferida pelo fluido, o momento que reſulta de todas as impulſões ſobre as partes das pennas mergulhadas na agua he ſempre igual ao momento, que receberia huma ſuperficie plana vertical da meſma largura das pennas, e igualmente mergulhada (n.545.). O cen-

tro de impreſſaõ deſta ſuperficie coincide com o ſeu centro de gravidade, por ſe ſuppor que todas as moleculas de agua a ferem com velocidades iguais, e parallelas. Naõ ſuccede o meſmo em huma roda, que já ſe move quando he ferida pelo fluido. Porque as partes de huma meſma penna tem differentes velocidades, conforme as diſtancias do eixo, e ſerá neceſſario calcular o momento elementar de cada parte, e attender ao numero das pennas, como adiante moſtraremos.

556 Aqui ſuppomos, conforme ao uſo ordinario, que em lugar das pennas ſe ſubſtitue huma ſuperficie plana vertical, que antes da percuſſaõ actual tenha já huma velocidade uniforme e permanente. Repreſentando eſta ſuperficie por A, a velocidade primitiva e uniforme do ſeu centro de impreſſaõ por u, a diſtancia deſte centro ao da roda por b, a velocidade conſtante do fluido por V, o pezo elevado por Q, a ſua velocidade por v, e o ſeu braço de alavanca por c; e ſuppondo que a impulſaõ perpendicular do fluido ſobre huma ſuperficie B em quietaçaõ he repreſentada pelo pezo F; ſerá a impulſaõ ſobre a ſuperficie A repreſentada por $\frac{F.A.(V-u)^2}{B.V^2}$ (n.504.). Logo, em rafaõ do equilibrio que ha a cada inſtante entre eſta impulſaõ e o pezo Q, teremos $\frac{F.A(V-u)^2}{B.V^2} \cdot b = Q.c$; e multiplicando o ſegundo membro por v, e o primeiro por $\frac{cu}{b}$ quantidade igual a v, acharemos $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$. Como pois he conſtante o coefficiente $\frac{F.A}{B.V^2}$, a queſtaõ ſe reduz a fazer que $(V-u)^2 u$ ſeja hum *maximo*. Aſſim teremos $(V-u)^2 du - 2(V-u)u\,du = 0$, e $u = \frac{1}{3}V$; donde ſe ſegue, que *para ſer o effeito da maquina hum maximo, he neceſſario que a velocidade do centro de impreſſaõ da ſuperficie A ſeja hum terço da velocidade do fluido.*

557 Subſ-

557 Subſtituindo o valor achado de u na equaçaõ $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$, teremos $Qv = \frac{4F.A.V}{27B}$, ou (fazendo a ſuperficie dada $B = A$), $Qv = \frac{4F.V}{27}$. Porém ſendo H a altura devida á velocidade V, temos proximamente $F = 2A.H$; logo $Qv = \frac{8A.H.V}{27}$. Donde ſe vê, que quando a maquina produz o maior effeito, póde imprimir a hum pezo de agua repreſentado por $\frac{8A.H}{27}$ a velocidade do fluido V, ou (que vem a ſer o meſmo) póde dar a hum pezo $A.H$ huma velocidade que ſeja $\frac{8}{27}$ da velocidade da corrente.

558 Tudo o que havemos dito das rodas mergulhadas verticalmente em huma corrente, ſe entenderá tambem das rodas horizontais, que tem as pennas rectangulares, e que ſaõ movidas por hum fluido cuja direcçaõ eſtá no plano da roda. Algumas vezes ſe uſa de rodas deſta eſpecie; mas ordinariamente a direcçaõ do fluido he obliqua ao plano da roda horizontal, e ſe dá certa inclinaçaõ ás pennas a reſpeito do meſmo plano. A fig. 161 repreſenta huma deſtas rodas, movida pela corrente VQ que cahe de certa altura, e que fere cada huma das pennas á medida que a ſua linha do meio AB ſe acha na horizontal CB perpendicular ao plano vertical que paſſaria pela direcçaõ VQ do canal. Bem ſe vê, que convem dar a eſta eſpecie de rodas hum grande numero de pennas, a fim de que os golpes do fluido ſe ſuccedaõ huns aos outros ſem interrupçaõ, pois o pezo que a roda ſe ſuppoem levantar actua continuamente em ſentido contrario. Deve com tudo evitar-ſe o multiplicar as pennas a ponto de fazer a roda muito pezada.

559 Sendo dada a direcçaõ do fluido, e a velocidade da roda, entre todas as poſições, que podem dar-ſe a cada penna relativamente á direcçaõ do fluido, ou do plano da roda, haverá huma que ſerá mais ventajoſa, pa-

ra

ra imprimir força na roda. Eſta poſiçaõ ſe determina, como no n.º 518.

Seja o plano da penna repreſentado por ef (Fig. 162.) $= A$, a direcçaõ do fluido VQH, e a ſua velocidade repreſentada por $QH = V$, a velocidade horizontal da roda por $QF = u$, e a percuſſaõ perpendicular do meſmo fluido ſobre hum plano dado B por F. Aſſim teremos a percuſſaõ que reſulta perpendicularmente ſobre o plano inclinado $ef = \frac{F.A.QG^2.MB^2}{B.QA^2.V^2}$ (n. 508.), repreſentando QA o ſeno total. Tomando QR perpendicular a ef, para repreſentar eſta impulſaõ, e reſolvendo-a em duas, huma QS pela direcçaõ de QF, e a outra QT perpendicular a QF, he evidente que a força QT he deſtruida, e que ſomente QS tende a mover a roda. Porém os triangulos ſemelhantes RQS, MQN daõ $QS = \frac{QR.MN}{QM} = \frac{QR.MN}{QA}$. Logo, ſubſtituindo o valor de QR ſerá a força $QS = \frac{F.A.QG^2.MB^2.MN}{B.QA^3.V^2}$, ou (ſuppondo o raio arbitrario $QA = 1$) $QS = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,GQM^2.\mathit{sen}\,FQf}{B.V^2}$, ou (fazendo o angulo conſtante $GQN = p$, e o angulo $GQM = x$) $QS = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x)}{B.V^2}$. Eſta força faz equilibrio a cada inſtante com o pezo Q' (Fig. 161.); e aſſim deſignando o raio da roda CQ por b, e o braço de alavanca do pezo Q' por c, teremos $Q'.c = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x)\,b}{B.V^2}$. Sendo pois a velocidade do pezo $= v$, e multiplicando por $v = \frac{cu}{b}$, acharemos $Q'v = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x).u}{B.V^2}$. Neſta equaçaõ he

he conſtante o factor $\frac{F.A.QG^2}{B.V^2}$, e a queſtaõ ſe reduz a fazer que $ſen\ x^2\ ſen\ (p-x)$ ſeja hum maximo; donde acharemos, como no n.º 518,

$$tang\ x = -\frac{3}{2}\ cot\ p + \sqrt{\left(\frac{9}{4}\ cot\ p^2 + 2\right)},$$

ou faremos huma conſtrucçaõ como no n.º 519.

Tambem he facil de calcular trigonometricamente o angulo AQX (Fig. 162.), ou a ſua ametade AQM. Porque ſendo dado o angulo VQF, no triangulo FQH conheceremos o angulo FQH e os dous lados QH, QF, e determinaremos o angulo FHQ, ou o ſeu igual HQG. Logo conheceremos o angulo GQF, e o ſeu ſupplemento GQN. No triangulo QKX conhecemos os lados QK, QX e o angulo $QKX = GQN$; e aſſim determinaremos o angulo QXK, ou o ſeu igual XQN. Logo conheceremos o angulo AQX, ſoma dos dous calculados GQN, XQN.

Tendo de qualquer maneira determinado em cada caſo particular os valores de $ſen\ x^2$, e $ſen\ (p-x)$, ſubſtituir-ſe-haõ na equaçaõ, para conhecer o valor abſoluto do *maximo*, iſto he, o effeito $Q'v$ da maquina quando elle he o maior poſſivel.

560 Se os angulos formados pela direcçaõ do fluido com o plano da penna, e com o da roda, forem dados, e quizermos ſaber a velocidade que deve ter a roda para o ſeu effeito ſer hum maximo, faremos a meſma conſtrucçaõ do n.º precedente (Fig. 163.), e acharemos a meſma equaçaõ $Q'v = \frac{F.A.QG^2.ſen\ x^2.ſen\ (p-x).u}{B.V^2}$.

Entaõ he facil de ver que tudo he conſtante, exceptuando a quantidade $QG^2.ſen\ x^2.u$. Tirando pois dos pontos A, G as perpendiculares AI, GZ, GP para as rectas QM, QH, e repreſentando por m o ſeno do angulo dado GHP, teremos $QG : GZ :: QA : AI :: QM : MB :: 1 : ſen\ x$, e conſeguintemente $QG^2.ſen\ x^2 = GZ^2$; teremos tambem $GH = QF = u = \frac{GP}{m}$. Logo ſerá $QG^2.ſen\ x^2.u = \frac{GZ^2.GP}{m}$; e deſprezando o diviſor conſtante m, a queſtaõ ſe

ſe reduzirá a fazer que $GZ^2 . GP$ ſeja hum *maximo*. E porque o ponto G deve achar-ſe na recta HY dada de poſiçaõ e de grandeza, fazendo $HY = b$; e abaixando a perpendicular QO, os triangulos ſemelhantes QOY, GZY daraõ $GZ = \frac{GY . QO}{QY} = \frac{QO(b-u)}{QY}$, e os triangulos ſemelhantes QOH, GPH daraõ $GP = \frac{QO . GH}{QH} = \frac{QO . u}{QH}$. Logo $GZ^2 . GP = \frac{QO^3 (b-u)^2 u}{QY^2 . QH}$; e deſprezando o factor conſtante $\frac{QO^3}{QY^2 . QH}$, ſeremos reduzidos a fazer que $(b-u)^2 u$ ſeja hum maximo. Aſſim teremos $(b-u)^2 du - 2u(b-u) du = 0$, e $u = \frac{1}{3} b$.

Donde ſe vê, que conduzindo pelo ponto dado H parallelamente á direcçaõ dada QF a recta HY que encontre em Y o prolongamento da penna fe; e que tomando $HG = \frac{1}{3} HY$, conduzindo QG, e acabando o parallelogrammo $QGHF$, a velocidade mais ventajoſa da roda ſerá repreſentada por QF. Calculando pois em cada caſo particular o valor de QF ou HG, ſubſtituir-ſe-ha na equaçaõ geral para determinar o valor abſoluto do maior effeito poſſivel da maquina $Q^1 v$.

561 As pennas naõ ſaõ ordinariamente planas, mas encurvaõ-ſe á maneira de culheres (Fig. 164.). Por meio deſta figura, depois de ſerem feridas pela agua conſervaõ parte della por algum tempo, a qual pelo ſeu pezo aumenta a velocidade, e a força da roda. Devem pois os reſultados dos calculos precedentes modificar-ſe hum pouco, relativamente a eſta circunſtancia. Em muitas Provincias de França, principalmente no Delfinado, e na Provença, ſe uſa de rodizios deſta forma na conſtrucçaõ dos moinhos.

562 Em Guienna e Languedoc applicaõ tambem aos moinhos outra eſpecie de rodas (Fig. 165.), que tem a forma de huma pyramide conica inverſa, ſituada verticalmente, e guarnecida na ſuperficie de pennas obliquas, ou ſpirais. Eſtas rodas ſe poem dentro de tinas de alve-

naria

naria conſtruidas de propoſito para eſſe effeito. He bem difficil calcular rigoroſamente os effeitos deſta eſpecie de rodizios ; mas poderá fazer-ſe huma idêa ſufficiente na practica , por meio da theorica que havemos dado para as outras eſpecies.

563 Ha pouco tempo que entre as Memorias da Academia appareceraõ indagações muito ingenhoſas ſobre as rodas hydraulicas, nas quais ſe ſerve o Autor de huma theorica diverſa da precedente. Suppoem , que as pennas de huma roda recebem todo o effeito da agua , e naõ deixaõ eſcapar parte alguma deſte fluido , ſem lhe haver tirado o exceſſo da ſua velocidade ſobre a dellas. Deſte modo compara a percuſſaõ dos fluidos á de hum corpo duro em movimento , que vai encontrar outro duro em quietaçaõ ; e acha , que para o maior effeito poſſivel da maquina deve a velocidade da roda ſer a ametade , e naõ o terço da velocidade do fluido , como ſe diz ordinariamente. Mas eſta theorica naõ he applicavel ás rodas mergulhadas nos rios , onde o fluido naõ he contido de ambos os lados , nem por conſeguinte neceſſitado a perder ametade da ſua velocidade contra as pennas. Tambem ſofre reſtricções muito ſenſiveis nas rodas , que ſe movem dentro de canais ; porque ſe perde ſempre huma parte do fluido pelos interſticios , que he neceſſario deixar entre as extremidades das pennas e o interior do canal. De mais , ſuppondo dados eſtes interſticios , a theorica referida conduz ſempre aos meſmos reſultados , ſeja qual for o numero das pennas ; ou ao menos naõ parece propria para determinar , ſe ha hum numero de pennas mais ventajoſo que outro. Porém agora veremos pela experiencia , que o numero das pennas naõ he indifferente , relativamente ao effeito da maquina.

Experiencias e Reflexões ſobre as Rodas movidas pela impulſaõ da agua.

564 A Fig. 166 repreſenta huma roda , que primeiramente tinha 48 pennas , e que ſucceſſivamente reduzimos a 24 , e a 12 , todas planas , e dirigidas ao centro , cuja largura era de 5 pollegadas juſtas , e a altura de 4 até 5. Ellas mergulhavaõ na agua do canal , que referimos no nº. 426 , a 50 pés de diſtancia da

reſer-

reſerva, deixando meia linha de interſticio entre as extremidades dellas, e o fundo e paredes do canal. O diametro exterior *B K* era de 3 pés 1 poll. 10 linh.; o do cylindro, em que ſe enroſcava a corda de 2 poll.; o das eſpigas do eixo de 2 linhas e meia; o da roldana O de 3 poll. 8 linh.; o das eſpigas do ſeu eixo de 2 linhas e 2 terços; e o da corda de 2 linh. A velocidade da corrente tinha ſido determinada pelas experiencias do nº. 426; e as voltas da roda em todas as experiencias ſeguintes naõ ſe começáraõ a contar, ſenaõ depois que o movimento ſe tinha feito uniforme; o que ſuccede ſempre, quando a roda tem dado 4 ou 5 voltas.

565 Sendo pois a elevaçaõ da adufa de 1 pollegada, e a velocidade permanente da agua no canal de 300 pés em 33 ſegundos (n. 426.), obſervámos os factos ſeguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	60''	33, 25
48	16	60	28, 5
24	12	60	29
24	16	60	25, 5
12	12	60	25, 5
12	16	60	19, 25

566 E ſendo a elevaçaõ da adufa a meſma, porém a velocidade da agua no canal de 300 pés em 30 ſegundos (n. 426.), achámos os factos ſeguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	48''	34
48	16	48	31, 25
24	12	48	30, 33...
24	16	48	28, 5
12	12	48	25
12	16	48	23

567 Por

567 Por eſtas experiencias ſe vê, que a roda com o meſmo pezo anda mais velozmente, quando tem maior numero de pennas. Logo em todos os caſos ſemelhantes ás meſmas experiencias, ſerá conveniente dar a huma roda ao menos 48 pennas, ſe ella as puder ter ſem ficar muito pezada, e ſem enfraquecer o anel, em que ellas encaixaõ. Vejamos pois, qual he o valor do arco *MBN*, que mergulha na agua. A extremidade de huma penna vertical mergulhava-ſe 13 linhas proximamente. Com eſta quantidade, e com o raio da roda, acharemos $MBN = 24^{\circ}\ 54'$. Nas rodas grandes, que tem perto de 20 pés de diametro, e que ſaõ movidas por huma corrente rapida, o arco mergulhado naõ excede de 25° até 30°; e ordinariamente ſe lhes naõ dá mais que 40 pennas. Se foſſe maior o numero dellas, ſeriaõ mais ventajoſas.

568 He praxe recebida dar hum pequeno numero de pennas ás rodas, que mergulhaõ em rios; e iſſo, para impedir que as pennas ſe naõ cubraõ humas ás outras, ou para que cada huma receba inteiramente a percuſſaõ da agua. A experiencia nos enſinará o que devemos penſar neſte ponto.

A roda, de que nos ſervimos para iſto (Fig. 167. 168.) he de conſtrucçaõ diverſa da precedente. *BGFHbbgf* he a elevaçaõ commua de duas coroas de ferro, cuja largura *Bb* he de 9 linhas, e a groſſura de 1 linha. As pennas ſaõ de folha de ferro de meia linha de eſpeſſura. A extremidade exterior *B* de cada huma he ſuſtentada por huma pequena cavilha de ferro, que ſe encaixa nas duas coroas, e a outra extremidade por duas haſtes *AR* de de ferro, que eſtaõ prezas em *R* á roda *K* movel ao redor do centro *C*. Por eſte meio ſe póde diminuir o numero das pennas, quando for neceſſario, e dirigillas ao centro, ou inclinallas ao raio, conforme ſe quizer. O diametro exterior *BF* he de 3 pés, a largura das pennas de 5 pollegadas, e a altura de 6; o diametro do cylindro que recebe a corda de 2 poll. 6 linh., o das eſpigas do ſeu eixo de 3. linh., o da roldana de 3 poll. 8 linh., o das eſpigas do ſeu eixo de 2 linh. e 2 terços, e o da corda de 2 linhas. O eixo da roda he guarnecido de huma pequena roda dentada, que por meio de huma taramella a faz parar no inſtante que ſe quer, e que ſerve para medir as fracções de huma volta. O pezo total da maquina he de 44 libras.

569 Pro-

569 Procurando pois huma corrente incluida entre dous muros verticais, parallelos, e diſtantes hum do outro de 12 até 13 pés, cujo fundo era bem unido, e a profundidade da agua de 7 até 8 pollegadas, aſſentámos a maquina (Fig. 167.), de maneira que as pennas ſe mergulhaſſem 4 pollegadas ſegundo a vertical, e que naõ houveſſe obſtaculo que alteraſſe os effeitos da percuſſaõ; e aſſim achamos os reſultados ſeguintes

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	24 *libr.*	60″	$27\frac{19}{48}$
24	24	60	$27\frac{7}{48}$
24	40	40	$15\frac{28}{48}$
12	40	40	$13\frac{15}{48}$

570 Por eſtas experiencias ſe vê, que a roda levanta o meſmo pezo com maior velocidade ſenſivel quando tem 24 pennas, do que quando tem 12 ſómente; mas quando tem 48 pennas a velocidade naõ differe quaſi nada da que ſe obſerva quando tem 24 pennas. O arco mergulhado *M B N* era de 77° 53′. He pois certo, que em caſos ſemelhantes a eſte convém dar ao menos 24 pennas á roda; e ſe o mergulhamento foſſe mais conſideravel, poderia ſer o numero menor. Na practica ordinaria daõ-ſe ás rodas dos moinhos mergulhadas em rios 8 até 10 pennas, e algumas vezes menos. Eſte numero he muito pequeno; e ellas andariaõ muito melhor, ſe tiveſſem de 12 até 18 pennas.

571 Havemos determinado pela theorica (n. 556.) a velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que reſulte o maior momento poſſivel. Agora conſultemos ſobre iſſo a experiencia.

Sendo

Sendo a roda de 48 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 425, cuja velocidade era 100 pés em 27 ſeg.			Sendo a roda de 24 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 569, e as pennas mergulhadas 4 polleg. verticalmente,		
Pezo levantado.	*Tempo.*	*Voltas da roda.*	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
33 libr.	40″	21 $\frac{8}{48}$	57 libr.	40″	12 $\frac{19}{48}$
33 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{44}{48}$	58	40	12 $\frac{10}{48}$
34	40	20 $\frac{32}{48}$	59	40	12 $\frac{1}{48}$
34 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{21}{48}$	60	40	11 $\frac{40}{48}$
35	40	19 $\frac{44}{48}$	61	40	11 $\frac{30}{48}$
35 $\frac{1}{2}$	40	19 $\frac{19}{48}$	62	40	11 $\frac{19}{48}$
36	40	18 $\frac{28}{48}$	63	40	11 $\frac{7}{48}$

572 Como os differentes pezos levantados tem o meſmo braço de alavanca, e os tempos ſaõ iguais, as ſuas velocidades ſeraõ como os numeros das voltas reſpectivas da roda. Aſſim, deſprezando a fricçaõ e reſiſtencia do ar, o maior effeito da maquina ſerá, quando for maior o producto do pezo levantado pelo numero correſpondente das voltas da roda. No primeiro caſo acharemos, que o maior deſtes productos he o que correſponde ao pezo de 34 $\frac{1}{2}$ libras, quando a roda dá 20 $\frac{7}{16}$ voltas em 40 ſegundos.

Sendo poĩs a velocidade do fluido de 300 pés em 27″, ou de 5334 poll. em 40″, buſquemos a velocidade do centro de impreſſaõ da roda no meſmo tempo. Por quanto o diametro da roda era de 36 pollegadas, e o diametro da circumferencia deſcrita pelo centro de impreſſaõ de 34 proximamente, o dito centro deſcrevia em 40″ o eſpaço

paço de 34. $\frac{355}{113}\left(20+\frac{7}{16}\right)$, isto he ; de 2183 pollegadas. Assim achamos, que a velocidade da agua era para a velocidade do centro de impressaõ, como 5334, para 2183, ou como 5 para 2 proximamente. Donde se vé, que a velocidade do centro de impressaõ das pennas he maior que o terço, e menor que a ametade da velocidade do fluido, quando a roda se move em canal estreito.

573 Mas esta rasaõ será a mesma, havendo respeito ás resistencias? a questaõ póde reduzir-se a isto. Temos duas quantidades semelhantes, e consecutivas Mv, Nv', cada huma das quais exprime o producto do pezo pela sua velocidade, e suppoem-se que Mv he hum *maximo*, e por conseguinte $Mv > Nv'$. Entaõ, para ter conta das resistencias, cada hum dos pezos M, N deve suppor-se aumentado de certa quantidade. Suppondo pois que M se torna em $M+m$ e N em $N+n$; pergunta-se, se a mesma velocidade v que faz Mv hum *maximo*, fará tambem $Mv+mv$ hum *maximo*, ou $Mv+mv > Nv'+nv'$? He evidente, que em geral póde ser, ou naõ ser, conforme a rasaõ dos pezos m, n. Mas aqui he provavel, que as forças das resistencias mv, nv' saõ, ao menos sensivelmente, como as forças Mv, Nv'. Assim teremos $mv : nv' :: Mv : Nv'$, e consequintemente $Mv+mv : Nv'+nv' :: Mv : Nv'$. Porém $Mv > Nv'$; logo $Mv+mv > Nv'+nv'$.

574 No segundo caso medimos a velocidade da corrente por meio de hum molinete muito ligeiro, situado ao lado da roda, e achámos que a velocidade *media* da agua era de 2740 em 40''. E multiplicando cada pezo das experiencias pelas voltas correspondentes da roda, vemos que o *maximo* corresponde ao pezo de 60 libras, quando a velocidade da circumferencia da roda he de 1338 pollegadas em 40'', e a do centro de impressaõ de 1189 pollegadas no mesmo tempo. Donde se vê, que tambem nas rodas mergulhadas nos rios deve ser a velocidade do centro de impressaõ 2 quintos da velocidade da corrente, sem grande differença.

575 Examinemos agora, se nas rodas verticais he ventajoso, ou naõ, inclinar as pennas ao raio, como se pratica algumas vezes (Fig. 168.).

Primeiramente no canal estreito do n.º 426, sendo a velo-

velocidade da agua de 300 pés em 27″ com a roda de 48 pennas, para differentes inclinaçoens dellas, ou angulos *CBA*, achamos os reſultados ſeguintes

Inclinaçaõ.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	34 libr.	40″	20 $\frac{26}{48}$
8	34	40	19 $\frac{20}{48}$
8	38	40	17 $\frac{5}{48}$
12	34	40	19 $\frac{40}{48}$
12	38	40	17 $\frac{22}{48}$
16	34	40	20 $\frac{24}{48}$

E depois no canal largo do nº 569, ſendo a roda de 12 pennas, e eſtando mergulhada na agua 4 pollegadas verticalmente, achamos os reſultados ſeguintes

Inclinaçaõ.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	40 libr.	40″	13 $\frac{17}{48}$
15	40	40	14 $\frac{21}{48}$
30	40	40	14 $\frac{22}{48}$
37	40	40	14 $\frac{15}{48}$

576 Donde ſe vê, que no primeiro caſo, as pennas dirigidas ao centro ſaõ mais ventajoſas que as inclinadas de

de 8° ; porém eſtas menos ventajoſas que as inclinadas de 12°, e eſtas menos que as inclinadas de 16°. A raſaõ he ; porque ſendo as pennas inclinadas, a percuſſaõ obliqua ſe reſolve em duas, huma perpendicular á penna, a qual ſó executa a percuſſaõ, e a outra parallela á meſma penna, a qual faz ſubir a agua ao longo della. Eſta agua elevada fica por algum tempo ſobre a penna, e pelo ſeu pezo compenſa, e póde exceder o que ſe tinha perdido na percuſſaõ pela obliquidade.

No ſegundo caſo ſe vê, que a obliquidade mais ventajoſa ſe acha entre 15° e 30°. Sempre ha huma obliquidade que ſe naõ deve paſſar, porque ſe perderia mais na percuſſaõ do que ſe ganharia no pezo da agua. M. Deparcieux (*Mem. de l'Acad.* 1759.) refere muitas outras experiencias, em que as pennas inclinadas ao raio ſaõ mais ventajoſas, que as dirigidas ao centro.

Das rodas movidas pelo pezo da agua; ou pelo pezo, e pela impulſaõ ao meſmo tempo.

577 AS rodas de que agora tratamos, e que ordinariamente ſe chamaõ *rodas de cubos*, ſaõ as que recebem a agua de huma corrente em certas vaſilhas *A m n* practicadas na circumferencia (Fig. 170.), cujo pezo as faz andar. Os cubos devem conſervar a agua recebida o mais que he poſſivel, e conſeguintemente naõ devem começar a deſpejar-ſe, ſenaõ quando tem chegado perto do ponto *D* extremidade inferior da vertical *AD*.

578 Algumas vezes a roda tem menos velocidade, do que o fluido que entra nos cubos; e entaõ he movida ao meſmo tempo pela percuſſaõ da agua que entra de novo a cada inſtante, e pelo pezo da que elles contém.

579 O movimento da roda he accelerado nos primeiros inſtantes; mas depois de algumas revoluções ſe faz uniforme. Entaõ, a força que a roda recebe ou do pezo do fluido, ou do pezo combinado com a percuſſaõ, faz continuamente equilibrio com o pezo *Q*, que a maquina levanta, ou que ſe conſidera levantar, e com a reſiſtencia da fricçaõ. Neſte caſo o equilibrio he, como ſe a maquina eſtiveſſe em quietaçaõ; e por iſſo naõ conſideramos o movimento, ſenaõ depois de haver chegado á uniformidade.

580 Iſto

580 Iſto poſto, ſeja $ABDE$ (Fig. 171.) huma roda vertical perfeitamente movel ao redor do centro C; e ſeja cuberta de agua a porçaõ da coroa $GgBbH$, cuja altura Gg ou Hb ſe conſidera infinitamente pequena em comparaçaõ do raio CM. Do centro C tirem-ſe os raios infinitamente vezinhos CM, Cm, que determinaõ a quantidade elementar de agua $MNnm$; e pelos pontos G, H, M, m tirem-ſe as horizontais GF, HV, MP, mp, e abaixe-ſe a vertical MI, que encontre em I o diametro horizontal BE, e em t a ordenada mp ao diametro vertical AD. A porçaõ de agua $MNnm$ póde repreſentar-ſe por $Mm.MN$; e o ſeu momento relativo ao centro C ſerá $Mm.MN.CI$, ou $Mm.MN.MP$. Porém os triangulos ſemelhantes Mtm, MPC daõ $Mm.MP = CM.Pp$. Logo o momento ſerá repreſentado por $MN.CM.Pp$; e conſeguintemente o momento total de toda a agua $GgBbH$, por $MN.CM.FV$.

581 Logo, ſe a roda girar com velocidade igual á da agua que entra nos cubos, de maneira que naõ haja percuſſaõ, e ſe deſignarmos o pezo elevado por Q, o ſeu braço de alavanca por c, e a ſua velocidade por v, a velocidade da circumferencia da roda por u, a ſecçaõ rectangular de hum cubo por A, cuja largura he horizontal, e a altura MN; teremos $Qc = A.CM.FV$, e $v = \frac{cu}{CM}$; donde ſe tira $Qv = A.FV.u$.

582 Seja primeiramente huma roda vertical $ABDE$ (Fig. 172.), movida pela agua de hum canal fechado $OZGg$, de maneira que conduzindo a horizontal GF, a velocidade em G ſeja devida á altura RF da reſerva proviſional $XZYT$; e ſupponhamos, que a roda ſe move com huma velocidade igual á do fluido, e que a porçaõ da coroa $GBHbbg$ repreſenta a agua que eſtá conſtantemente nos cubos, de maneira que ſe vaſe tanta por Hb como entra por Gg. Guardando as denominações do n.º precedente, e ſuppondo que H he a altura devida a huma velocidade dada V, e fazendo $RV = b, RF = x$, teremos $u = V\sqrt{\frac{x}{H}}$, e $Qv = \frac{AV(b-x)\sqrt{x}}{\sqrt{H}}$.

Aſſim para ſer o effeito maior que he poſſivel, deverá

ſer $(b-x)\sqrt{x}$ hum *maximo*, e conſeguintemente teremos $\frac{(b-x)\,dx}{2\sqrt{x}} - dx\sqrt{x} = 0$; donde ſe tira $x = \frac{1}{3}b$. Para ſer pois o effeito da maquina o maior que he poſſivel, he neceſſario que a altura devida á velocidade da roda ſeja hum terço da altura da reſerva acima do ponto mais baixo, onde a agua dos cubos ſe deſpeja.

583 Subſtituindo o valor achado de x na equaçaõ $Qv = \frac{AV(b-x)\sqrt{x}}{VH}$, teremos $Qv = \frac{2AVb\sqrt{b}}{3\sqrt{3}H}$ por expreſſaõ do maior effeito poſſivel.

584 A ſoluçaõ deſte problema póde ſer util, quando tendo conſtruido huma roda ſe quer fazer andar do modo mais ventajoſo, e quando ſendo dada a altura da reſerva, temos a liberdade de tomar mais ou menos agua, conforme for neceſſario. Bem ſe vê, que entaõ he neceſſario conduzir o canal $OZGg$ de maneira, que a agua ſeja recebida toda nos cubos, que a altura RF ſeja hum terço de RV, e que a circumferencia da roda tome a velocidade do fluido em G. He indifferente, que a agua entre por cima da roda como na Fig. 172, ou de ilharga como na Fig. 173.

585 Quando podemos dar ao fluido a queda RV, perguntar-ſe-ha ſe em lugar da roda de cubos naõ ſeria mais ventajoſo empregar huma roda de pennas, que foſſe movida pela percuſſaõ do fluido com a velocidade devida á dita altura. Para reſponder a iſto obſervaremos, que ſuppondo a ſuperficie A conſtante, e ſendo a velocidade adquirida por RV repreſentada por $\frac{V.\sqrt{RV}}{VH}$, o maior effeito da roda de pennas ſerá $\frac{8\,A.V.RV.\sqrt{RV}}{27\sqrt{H}}$ (n.557.). Logo o maior effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{8}{27}$, ou como 9 para $4\sqrt{3}$. Donde ſe vê, que a roda de cubos he mais ventajoſa que a de pennas na raſaõ de 9 para 7 proximamente: ao que

ſe deve acreſcentar, que a primeira deſpende menos que a ſegunda na raſaõ de $V RF$ para $V RV$, ou de 1 para $\sqrt{3}$.

586 A hypotheſe, que ſerve de baſe aos n.os 582, 583, 584, que ſendo conſtante a altura da reſerva podemos tomar mais ou menos agua conforme quizermos, naõ tem lugar ordinariamente na practica. Pela maior parte ſuccede, que a reſerva dá quantidades iguais de agua em tempos iguais, de qualquer maneira, e em qualquer altura que ella ſe receba na roda.

Supponhamos pois, que $ABDE$ (Fig. 174.) he huma roda vertical, movida pela agua de hum canal aberto; e repreſentemos por M a quantidade conſtante de agua, que elle fornece em hum tempo dado, em hum ſegundo por exemplo. A velocidade u da circumferencia da roda ſerá o eſpaço deſcrito por ella no meſmo tempo; e teremos $Au = M$, ou $A = \frac{M}{u}$. Logo ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ do n.º 581, teremos $Qv = M.FV$. Donde ſe vê, que para fazer o effeito Qv o maior que he poſſivel, he neceſſario aumentar FV quanto for poſſivel.

587 Daqui ſe ſegue, que ſendo dada a altura RV, e conſervando-ſe ſempre a meſma deſpeza M por meio das mudanças que ſe podem fazer no orificio OZ, quanto mais ſe diminuir a parte RF, mais ſe aumentará o effeito da maquina. Porém á medida que diminue RF, diminue a velocidade do fluido, e conſeguintemente a da roda. Logo a roda produzirá hum effeito maior, quando girar com menor velocidade. Mas iſto tem ſeus limites; porque ſendo dadas as dimenſões dos cubos pela equaçaõ $A = \frac{M}{u}$, deve creſcer A quando u diminue, e o aumento de A deve ter ſeus limites, de outra ſorte a roda deveria ſer muito alta, e muito larga, e conſeguintemente muito pezada.

588 Sendo pois o effeito deſta roda repreſentado por $M.FV$, ou por $M(RV - RF)$, he facil de ver (n.º 557.) que o maior effeito de huma roda de pennas debaixo da altura RV ſeria repreſentado por $\frac{8 M.RV}{27}$; porque

a deſpeza da agua he como a velocidade multiplicada pelo orificio, e a velocidade como a raiz quadrada da altura. Logo o effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como $27(RV-RF)$ para $8RV$; e porque RF ſe ſuppoem muito menor que RV, o effeito da primeira ſerá muito maior que o da ſegunda.

589 Supponhamos agora huma roda, que ande com menor velocidade que a do fluido em G; e ſeja u a velocidade da roda, V a do fluido em G, F a impulſaõ perpendicular que elle daria em hum plano B em quietaçaõ, e C a ſuperficie plana a que ſe reduz a ſuperficie dos cubos ferida perpendicularmente pelo fluido. Conſervando as outras denominações dos n.os precedentes, acharemos $Qv = M.FV + \frac{F:C(V-u)^2u}{B.V^2}$ (n.556. e 586.).

590 Para determinar o maximo, reflectiremos, que no ſegundo membro tudo he conſtante, excepto $(V-u)^2u$, e acharemos $u = \frac{1}{3}V$. Metendo eſte valor na equaçaõ, tomando $B = C$, fazendo $F = 2C.RF$ (n. 527.), e advertindo que $M = C.V$, acharemos $Qv = M.FV + \frac{8M.RF}{27}$, ou $Qv = M\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$.

Donde ſe vê, que eſta roda produzirá tanto maior effeito, quanto menor for a ſua velocidade, e que o ſeu maior effeito ſerá para o de huma roda de pennas debaixo da queda RV, como $27\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$ para $8RV$.

591 De tudo iſto ſe ſegue, que as rodas de cubos ſaõ mais ventajoſas que as de pennas, quando ſe póde dar á agua grande queda. Porém ha occaſiões, em que he neceſſario que a roda ande com grande velocidade, e por outra parte a agua he em abundancia. Entaõ ſaõ preferiveis as rodas de pennas; porque produzindo as de cubos o maior effeito quando andaõ de vagar, ſeria neceſſario, que endentaſſem em alguns carretes ou lanternas, o que complicaria a maquina, e aumentaria a fricçaõ. As rodas de pennas ſaõ tambem as unicas, que podem ſervir nas correntes dos rios.

592 So-

592 Sobre as rodas de cubos fizemos poucas experiencias ; mas naõ deixará de ſer util ajuntarmolas aqui.

A Fig. 170 repreſenta a maquina , de que nos ſervimos. O canal *XYTZ* que conduzia a agua era horizontal , de 5 pollegadas de largura , e dava conſtantemente 1194 pollegadas cubicas por minuto. A roda tinha 48 cubos de 3 pollegadas de altura , e 5 de largura ; o diametro da roda *AD* era de 3 pés , o do eixo de 2 pollegadas e 7 linhas , e o das ſuas eſpigas de 2 linhas e meia. A roldana *O* era a meſma , que nas experiencias das rodas de pennas.

593 Contando pois o numero das voltas , aſſim que o movimento tinha chegado á uniformidade , o que ſuccede ſempre depois de 5 ou 6 revoluções , obſervámos os factos ſeguintes

Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
11 *libr.*	60″	$11\frac{46}{48}$
12	60	$11\frac{11}{48}$
13	60	$10\frac{25}{48}$
14	60	$9\frac{40}{48}$
15	60	$9\frac{10}{48}$
16	60	$8\frac{31}{48}$
17	60	$8\frac{2}{48}$
18	60	$7\frac{32}{48}$

Com o pezo de 19 libras ainda ſe movia a roda , mas muito de vagar ; e com 20 libras parava , aindaque ſe puzeſſe primeiro em movimento com a maõ , para lhe fazer

fazer tomar a agua; e naõ tendo pezo algum, dava $40\frac{1}{4}$ voltas em hum minuto.

594 Multiplicando cada pezo pelo numero correſpondente das voltas da roda, acharemos que o maior producto correſponde proximamente ao pezo de 17 libras; e entaõ he a velocidade da roda ſenſivelmente, como a formula do nº. 590 requer.

Por quanto no caſo do maior effeito dá a roda $8\frac{3}{16}$ voltas em 1 minuto, e no meſmo tempo daria $40\frac{1}{4}$, ſe naõ levantaſſe pezo algum, ſegue-ſe que a velocidade competente ao maior effeito he para a velocidade, que a roda tomaria naturalmente ſendo deſcarregada, como 1 para 5 proximamente. Eſta reflexaõ póde ſer util na practica.

Determinaçaõ geral dos effeitos das rodas de pennas.

595 O Objecto, que aqui nos propomos, he determinar em geral o effeito de huma roda de pennas, havendo reſpeito á impulſaõ do fluido contra todas as pennas, que elle fere ao meſmo tempo. Eſte problema he inteiramente novo. Todos os Autores que eſcreveraõ ſobre eſta materia, naõ conſideráraõ mais que a impulſaõ contra huma ſó penna; o que facilita a ſoluçaõ, mas perde a generalidade, que he de tanto preço para os Geometras.

596 Seja *AKDB* (Fig. 169.) a circumferencia exterior de huma roda vertical, guarnecida de qualquer numero de pennas *Ee*, *Ff* &c dirigidas ao centro *C*, e mergulhadas em huma corrente horizontal *XYTZ*, cujos pontos ſe movem todos com a meſma velocidade. Seja *Mm* hum elemento qualquer da penna *Ee*; e do ponto *A* onde a ſuperficie do fluido encontra a circumferencia *AKDB*, conduza-ſe para o centro o raio *AC*, e abaixe-ſe o raio vertical *CI*. Supponhamos o raio da roda $CA = a$, a largura das pennas $= b$, o ſeno total $= 1$, o angulo $ACI = m$, o angulo ECI que faz a primeira penna ferida com a vertical $= p$, o angulo comprehendido por duas pennas conſecutivas $= q$, a velocidade do fluido $= V$, a de

de qualquer ponto da circumferencia $AKDB = u$, $EM = x$, $Mm = dx$, e a impulsaõ do fluido contra hum plano B em descanço $= F$.

Assim resolvendo a velocidade do fluido, como acima fizemos (n. 544.), teremos evidentemente My ou $zx = \frac{CM.u}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$, $nx = V\cos p$, $nz = nx - zx = V\cos p - \frac{u(a-x)}{a}$, e em fim $\text{sen}\, zMn = \frac{nz}{Mz} = \frac{aV\cos p - u(a-x)}{a.Mz}$. Logo a impulsaõ, que resulta perpendicularmente a Mm, será representada pela quantidade $\frac{Fbdx(aV\cos p - u(a-x)^2}{a^2 BV^2}$; e designando por dM o momento elementar que ella produz, teremos

$$dM = \frac{Fbdx(aV\cos p - u(a-x))^2.(a-x)}{a^2 BV^2},$$

ou fazendo, por abbreviar $\frac{Fb}{BV^2} = f$, e mudando hum pouco a fórma da equaçaõ

$$(A)\ldots dM = fdx\left(V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}\right)^2.\cos p^2.(a-x).$$

597 Bem se vê, que esta equaçaõ se integra sem dificuldade. Mas antes de fazer esta operaçaõ, observaremos que se a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$ fosse negativa, a penna seria a que feriria o fluido; e porque o quadrado he huma e outra expressaõ he o mesmo, naõ se poderia discernir qual dos dous casos tem lugar, se a integraçaõ se fizesse do modo ordinario. Eisaqui pois o que se deve fazer em geral.

Examinar-se-ha o que dá a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$, quando $x = EV = CE - CV = a - \frac{a\cos m}{\cos p}$, e quando $x = 0$. Isto posto, 1º. Se a dita quantidade for positiva em ambos os casos, o fluido ferirá a penna em toda a exten-

extenſaõ VE, e o calculo ſe fará como logo veremos; 2°. Se for negativa em ambos os caſos, a penna ferirá o fluido em toda a extenſaõ VE, e o calculo ſe fará do meſmo modo; 3°. Se for poſitiva no primeiro caſo e negativa no ſegundo, huma parte VR ſerá ferida pelo fluido, e a outra RE o ferirá a elle. Entaõ determinaremos o momento M, de maneira que o integral deſvaneça quando tivermos $V - \frac{u(a-x)}{a\,cof\,p} = o$, ou quando $x = \frac{au - Va\,cof\,p}{u}$, e que tenha o ſeu valor completo quando $x = EV = a - \frac{a\,cof\,m}{cof\,p}$. Seja G eſte integral, que exprime o momento de impulſaõ da agua contra VR. Tambem determinaremos M de maneira que o integral deſvaneça quando $x = o$, e tenha o valor completo quando $x = ER = \frac{au - Va\,cof\,p}{u}$. Seja H eſte integral, que exprime o momento da impulſaõ da parte RE contra o fluido. Eſtá claro, que $G - H$, ou $H - G$ repreſentará o momento da força reſultante que impelle a penna, ou o fluido.

598 He evidente, que o proceſſo do calculo he o meſmo nos tres caſos, e que ſe trata ſempre de tomar huma ſoma, ou huma differença de momentos de impulſaõ. Aqui naõ examinaremos mais que o primeiro, porque he o que tem lugar quaſi ſempre. Para que a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\,cof\,p}$ ſeja poſitiva em toda a extenſaõ EV, baſta que ſeja $V\,cof\,p = u$; e na practica temos quaſi ſempre $V\,cof\,p > u$. Porque, ſeja $u = \frac{V}{3}$, como ſuccede ordinariamente; a equaçaõ $V\,cof\,p = u$ daria $cof\,p = \frac{1}{3}$, e o angulo $p = 70° 30'$. Porém he extremamente raro que o angulo p ſeja taõ conſideravel, ou que a penna ſe mergulhe na agua até dous terços do raio. Sendo a quanti-

dade

dade $V - \frac{u(a-x)}{a\,cof\,p}$ poſitiva, com maior raſaõ o ſeraõ as quantidades $V - \frac{u(a-x)}{a\,cof(p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a\,cof(p-2q)}$ &c.

599 Integrando pois a equaçaõ (A) de maneira que o integral deſvaneça quando $x = o$, e receba o valor completo quando $x = EV = a - \frac{a\,cof\,m}{cof\,p}$, acharemos

$$M = \frac{f a^2 V^2 (cof\,p^2 - cof\,m^2)}{2} - \frac{2 f a^2 V u}{3}\left(cof\,p - \frac{cof\,m^3}{cof\,p^2}\right) + \frac{f a^2 u^2}{4}\left(1 - \frac{cof\,m^4}{cof\,p^4}\right).$$

E fazendo, por abbreviar, $f a^2 V^2 = N$, e $u = kV$; ſendo k hum coefficiente dado, teremos

$$M = N\left[\frac{cof\,p^2 - cof\,m^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(cof\,p - \frac{cof\,m^3}{cof\,p^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{cof\,m^4}{cof\,p^4}\right)\right].$$

600 Pelo ponto E ſeja conduzida $E1$ parallela á ſuperficie XY da agua. Eſtá claro, que ſó a parte FV' da penna Ff he ferida pelo fluido; e deſignando por M' o momento de impulſaõ contra eſta parte, acharemos pelo meſmo methodo

$$M' = N\left[\frac{cof(p-q)^2 - cof\,p^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(cof(p-q) - \frac{cof\,p^3}{cof(p-q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{cof\,p^4}{cof(p-q)^4}\right)\right].$$

Do meſmo modo, conduzindo $F2$, $G3$ &c parallelas á ſuperficie do fluido, e repreſentando por M'', M''',.... M^n os momentos de impulſaõ contra as partes GV'', HV''' &c, e contra huma parte indeterminada, teremos as equações ſeguintes

$$M'' = N\left[\frac{cof(p-2p)^2 - cof(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(cof(p-2q) - \frac{cof(p-q)^3}{cof(p-2q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 -\right.\right.$$

cof

$$\frac{cof(p-q)^4}{cof(p-2q)^4}\Big)\Big],$$

$$M''' = N\Big[\frac{cof\,p-3q)^2-cof(p-2q)^2}{2}-\frac{2k}{3}$$

$$\Big(cof(p-3q)-\frac{cof(p-2q)^3}{cof(p-3q)^2}\Big)+\frac{k^2}{4}\Big(1-$$

$$\frac{cof(p-2q)^4}{cof(p-3q)^4}\Big)\Big],$$

. . . . . .

$$M^n = N\Big[\frac{cof(p-nq)^2-cof(p-(n-1)q)^2}{2}-\frac{2k}{3}$$

$$\Big(cof(p-nq)-\frac{cof(p-(n-1)q)^3}{cof(p-nq)^2}\Big)+\frac{k^2}{4}\Big(1-$$

$$\frac{cof(p-(n-1)q)^4}{cof(p-nq)^4}\Big)\Big];$$

representando-se pelo numero inteiro $n+1$ o numero das pennas feridas pela agua.

601 Por conseguinte, se por abbreviar a expressão, tomarmos $S = \frac{M+M'+M''\ldots.+M^n}{N}$, omittindo os termos que se destroem, teremos a equação seguinte

$$S = \frac{cof(p-nq)^2-cof\,m^2}{2}$$

$$-\frac{2k}{3}\times\Big\{\begin{array}{l}+cof\,p-\frac{cof\,m^2}{cof\,p^2}\\ +cof(p-q)-\frac{cof\,p^3}{cof(p-q)^2}\\ +cof(p-2q)-\frac{cof(p-q)^3}{cof(p-2q)^2}\\ +cof(p-3q)-\frac{cof(p-2q)^3}{cof(p-3q)^2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +cof(p-nq)-\frac{cof(p-(n-1)q)^3}{cof(p-nq)^2},\end{array}$$

+

$$\pm \frac{k_2}{4} \times \left\{ \begin{array}{l} \pm 1 - \dfrac{cof\, m4}{cof\, p4} \\ \pm 1 - \dfrac{cof\, p4}{cof\,(p-q)4} \\ \pm 1 - \dfrac{cof\,(p-q)4}{cof\,(p-2q)4} \\ \pm 1 - \dfrac{cof\,(p-2q)4}{cof\,(p-3q)4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm 1 - \dfrac{cof\,(p-(n-1)q)4}{cof\,(p-nq)4} \end{array} \right. ;$$

formula, que dá o momento total da impulsaõ da agua a cada inſtante, qualquer que ſeja o numero das pennas. Eſtá claro, que S varîa á medida que varîa o angulo p, ſendo as mais quantidades conſtantes, iſto he, á medida que a roda na ſua revoluçaõ toma differentes poſiçoens, deſde que huma penna entra no fluido até entrar a ſeguinte.

602 Além das denominaçoens precedentes, repreſentemos por Q o pezo variavel, ao qual a percuſſaõ da agua póde fazer equilibrio a cada inſtante, por c o ſeu braço de alavanca, por dt o elemento do tempo, e por dy o pequeno arco deſcrito por hum ponto da circumferencia $AKDB$ no inſtante dt. Aſſim teremos $Q.c = N.S$, e $Qc\,dt = NS\,dt$. Mas $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$ (ponho $-dp$, porque creſcendo t diminue p). Logo $Qc\,dt = -\frac{aNS\,dp}{u}$, e conſeguintemente $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$.

603 Subſtituindo no ſegundo membro o valor de S acima achado (n. 601.), teremos differentes eſpecies de termos, de cujos coefficientes conſtantes preſcindimos por agora.

Primeiramente o termo $dp\,(cof(p-nq)^2 - cof\,m^2)$ ſe integra facilmente : porque ſe reduz á fórma $\frac{dp}{2} +$

dp

$\frac{dp\,cof(2p-2nq)}{2} - dp\,cof m^2$, cujo integral he $\frac{p}{2} + \frac{fen(2p-2nq)}{4} - p\,cof m^2$. O integral de $dp\,cof p$ he $fen\,p$; o de $dp\,cof(p-q)$, he $fen(p-q)$; o de $dp\,cof(p-2q)$, he $fen(p-2q)$; e aſſim dos mais deſta eſpecie.

A unica difficuldade he integrar os termos $\frac{dp\,cof m^3}{cof p^2}$; $\frac{dp\,cof p^3}{cof(p-q)^2}$, $\frac{dp\,cof(p-q)^3}{cof(p-2q)^2}$ &c, aſſim como tambem os termos $\frac{dp\,cof m^4}{cof p^4}$, $\frac{dp\,cof p^4}{cof(p-q)^4}$, $\frac{dp\,cof(p-q)^4}{cof(p-2q)^4}$, &c. Eiſaqui o modo de fazer eſtas integraçoens.

604 1.º He facil de integrar $\frac{dp}{cof p^2}$. Porque fazendo $cof p = \frac{1}{z}$, teremos $\frac{dp}{cof p^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-1)}}$, cujo integral he $\sqrt{(zz-1)} = \frac{fen\,p}{cof p}$.

2.º Para integrar $\frac{dp\,cof p^3}{cof(p-q)^2}$, obſervaremos que $cof p = cof((p-q)+q) = cof(p-q)\,cof q - fen(p-q)\,fen q$, e por conſeguinte acharemos que he $\frac{dp\,cof p^3}{cof(p-q)^2} = dp\,cof(p-q)\,cof q^3 - 3\,dp\,fen(p-q)\,fen q\,cof q^2 + \frac{3\,dp\,fen(p-q)^2\,fen q^2\,cof q}{cof(p-q)} - \frac{dp\,fen(p-q)^3\,fen q^3}{cof(p-q)^2} = cof q^3 . dp\,cof(p-q) - 3\,fen q\,cof q^2 . dp\,fen(p-q) + 3\,fen q^2\,cof q . \frac{dp}{cof(p-q)} - 3\,fen q^2\,cof q . dp\,cof(p-q) - fen q^3 . \frac{dp\,fen(p-q)}{cof(p-q)^2} + fen q^3 . dp\,fen(p-q)$. Porém $\int dp\,cof(p-q) = fen(p-q)$; $\int dp\,fen(p-q) = -cof(p-q)$;

q). O termo $\frac{dp}{cof(p-q)}$ ſe integra fazendo $cof(p-q) = \frac{1}{s}$; o que dá $dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)}} = \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}}$, $\frac{dp}{cof(p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, cujo integral he $l(s+\sqrt{(ss-1)}) = l\left(\frac{1+sen(p-q)}{cof(p-q)}\right)$. O termo $\frac{dp\,sen(p-q)}{cof(p-q)^2}$ he o meſmo que $\frac{-d.cof(p-q)}{cof(p-q)^2}$, e tem conſeguintemente por integral $\frac{1}{cof(p-q)}$. Aſſim o integral inteiro de $\frac{dp\,cof\,p^3}{cof(p-q)^2}$ he $cof\,q^3\,sen(p-q) + 3\,sen\,q\,cof\,q^2\,cof(p-q) + 3\,sen\,q^2\,cof\,q.\,l\left(\frac{1+sen(p-q)}{cof(p-q)}\right) - 3\,sen\,q^2\,cof\,q\,sen(p-q) - \frac{sen\,q^3}{cof(p-q)} - sen\,q^3\,cof(p-q)$.

Do meſmo modo, obſervando que $cof(p-q) = cof((p-2q)+q) = cof(p-2q)\,cof\,q - sen(p-2q)\,sen\,q$, acharemos que o integral do termo $\frac{dp(p-q)^3}{cof(p-2q)^2}$ he $cof\,q^3\,sen(p-2q) + 3\,sen\,q\,cof\,q^2\,cof(p-2q) + 3\,sen\,q^2\,cof\,q.\,l\left(\frac{1+sen(p-2q)}{cof(p-2q)}\right) - 3\,sen\,q^2.\,cof\,q\,sen(p-2q) - \frac{sen\,q^3}{cof(p-2q)} - sen\,q^3\,cof(p-2q)$. E pelo meſmo methodo ſe integraráõ as quantidades analogas $\frac{dp\,cof(p-2q)^3}{cof(p-3q)^2}$, $\frac{dp\,cof(p-3q)^3}{cof(p-4q)^2}$ &c.

3.° Para integrar $\frac{dp}{cos\,p^4}$, faremos $cos\,p = \frac{1}{V(1+zz)}$; e teremos $\frac{dp}{cos\,p^4} = dz + z^2\,dz$, cujo integral he $z + \frac{z^3}{3} = \frac{sen\,p}{cos\,p} + \frac{sen\,p^3}{3\,cos\,p^3}$.

4.° Para integrar $\frac{dp\,cos\,p^4}{cos\,(p-q)^4}$, obſervaremos que $cos\,p = cos\,((p-q)+q) = cos\,(p-q)\,cos\,q - sen\,(p-q)\,sen\,q$; e conſeguintemente, que $\frac{dp\,cos\,p^4}{cos\,(p-q)^4} = dp\,cos\,q^4 - 4\,cos\,q^3\,sen\,q\,\frac{dp\,sen\,(p-q)}{cos\,(p-q)} + 6\,cos\,q^2\,sen\,q^2\,\frac{dp\,sen\,(p-q)^2}{cos\,(p-q)^2} - 4\,cos\,q\,sen\,q^3\,\frac{dp\,sen\,(p-q)^3}{cos\,(p-q)^3} + sen\,q^4\,\frac{dp\,sen\,(p-q)^4}{cos\,(p-q)^4} = dp\,(cos\,q^4 - 6\,cos\,q^2\,sen\,q^2 + sen\,q^4) - (4\,cos\,q^3\,sen\,q - 4\,cos\,q\,sen\,q^3)\,\frac{dp\,sen\,(p-q)}{cos\,(p-q)} + (6\,cos\,q^2\,sen\,q^2 - 2\,sen\,q^4)\,\frac{dp}{cos\,(p-q)^2} - 4\,cos\,q\,sen\,q^3\,\frac{dp\,sen\,(p-q)}{cos\,(p-q)^3} + sen\,q^4\,\frac{dp}{cos\,(p-q)^4}$. Os differentes termos deſta quantidade integraõ-ſe por methodos e transformaçõens analogas ás precedentes; e acharemos que o integral inteiro de $\frac{dp\,cos\,p^4}{cos\,(p-q)^4}$ he $p\,(cos\,q^4 - 6\,cos\,q^2\,sen\,q^2 + sen\,q^4) + (4\,cos\,q^3\,sen\,q - 4\,cos\,q\,sen\,q^3)\,l\,cos\,(p-q) + (6\,cos\,q^2\,sen\,q^2 - sen\,q^4)\,\frac{sen\,(p-q)}{cos\,(p-q)} - \frac{2\,cos\,q\,sen\,q}{cos\,(p-p)^2} + \frac{sen\,q^4\,sen\,(p-q)^3}{3\,cos\,(p-q)^3}$.

As quantidades $\frac{dp\,cos\,(p-q)^4}{cos\,(p-2q)^4}$, $\frac{dp\,cos\,(p-2q)^4}{cos\,(p-3q)^4}$ &c integrar-ſe-haõ da meſma maneira.

605 Acabados eſtes calculos, tomaremos o integral

$\int -$

$\int -S\,dp$ de maneira que deſvaneça quando $p = m$, e receba o valor completo quando $p = m - q$; e acharemos differentes ſeries de termos, tais que de huma ſerie para a outra ſe deſtroem em parte. Aſſim omittindo todos eſſes termos, a equaçaõ $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$ ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$(B)\ldots\ldots c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos m^2}{2}\right)q + \frac{1}{8}\left(\sin(2m-2nq)-\sin(2m-2(n+1)q)\right)\right.$$

$$+\frac{2k\cos m^3}{3}\left(\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\sin(m-q)}{\cos(m-q)}\right)-\frac{2k}{3}\left(\sin m-\sin(m-(n+1)q)\right)+\frac{2k}{3}(\cos q^3-3\sin q^2\cos q)(\sin(m-q)-\sin(m-(n+1)q))+\frac{2k}{3}(3\sin q\cos q^2-\sin q^3)(\cos(m-q)-\cos(m-(n+1)q))-\frac{2k\sin q^3}{3}\left(\frac{1}{\cos(m-q)}-\frac{1}{\cos(m-(n+1)q)}\right)+2k\sin q^2\cos q\,l\left(\frac{1+\sin(m-q)(\cos(m-(n+1)q))}{\cos(m-q)(1+\sin(m-(n+1)q))}\right)+$$

$$\frac{k^2q}{4}(n+1-\sin q^4-\cos q^4+6\cos q^2\sin q^2)-\frac{k^2\cos m^4}{4}\left(\frac{\sin m}{\cos m}+\frac{\sin m^3}{3\cos m^3}-\frac{\sin(m-q)}{\cos(m-q)}-\frac{\sin(m-q)^3}{3\cos(m-q)^3}\right)-k^2(\cos q^3\sin q-\cos q\sin q^3)\,l\left(\frac{\cos(m-q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right)$$

$$-\frac{k^2}{4}(6\cos q^2\sin q^2-\sin q^4)\left(\frac{\sin(m-q)}{\cos(m-q)}-\frac{\sin(m-(n+1)q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right)+\frac{k^2\cos q\sin q^3}{2}\left(\frac{1}{\cos(m-q)^2}-\frac{1}{\cos(m-(n+1)q)^2}\right)-\frac{k^2}{12}\sin q^4\left(\frac{\sin(m-q)^3}{\cos(m-q)^3}-\right.$$

$$- \frac{\mathit{sen}\,(m-(n+1)q)^3}{\mathit{cos}\,(m-(n+1)q)^3}\Big)\Big] .$$

606 Neſta formula, $\int Q\,dt$ repreſenta o pezo, ao qual a percuſſaõ da agua póde fazer equilibrio durante o tempo t, que a roda emprega em deſcrever o angulo q. Supponhamos $\frac{\int Q\,dt}{t} = Q'$, ſendo Q' ſimpleſmente hum pezo; e conſideremos, que $t = \frac{aq}{u}$. Além diſſo, ſupponhamos que no inſtante em que a primeira penna Ee entra no fluido, a penna Kk eſtá ſituada na vertical; o que dá $m = (n+1)q$. Entaõ dividindo o primeiro membro da equaçaõ (B) por t, e o ſegundo por $\frac{aq}{u}$, e pondo m em lugar de $(n+1)q$, teremos a equaçaõ ſeguinte

$$(C) \ldots\ldots Q'c = \frac{N}{q}\Big[\Big(\frac{1}{4} - \frac{\mathit{cos}\,m^2}{2}\Big)q + \frac{\mathit{sen}\,2q}{8}$$
$$+ \frac{2k\,\mathit{cos}\,m^3}{3}\Big(\frac{\mathit{sen}\,m}{\mathit{cos}\,m} - \frac{\mathit{sen}\,(m-q)}{\mathit{cos}\,(m-q)}\Big) - \frac{2k\,\mathit{sen}\,m}{3} +$$
$$\frac{2k}{3}(\mathit{cos}\,q^3 - 3\,\mathit{sen}\,q^2\,\mathit{cos}\,q)(\mathit{sen}\,(m-q) + \frac{2k}{3}(3\,\mathit{sen}\,q\,\mathit{cos}\,q^2$$
$$- \mathit{sen}\,q^3)(\mathit{cos}\,(m-q) - 1) - \frac{2k\,\mathit{sen}\,q^3\,(1-\mathit{cos}\,(m-q))}{3\,\mathit{cos}\,(m-q)}$$
$$+ 2k\,\mathit{sen}\,q^2\,\mathit{cos}\,q \,.\, l\Big(\frac{1+\mathit{sen}\,(m-q)}{\mathit{cos}\,(m-q)}\Big) + \frac{k^2 q}{4}\Big(n+1$$
$$- \mathit{sen}\,q^4 - \mathit{cos}\,q^4 + 6\,\mathit{cos}\,q^2\,\mathit{sen}\,q^2\Big) - \frac{k^2\,\mathit{cos}\,m^4}{4}\Big(\frac{\mathit{sen}\,m}{\mathit{cos}\,m} +$$
$$\frac{\mathit{sen}\,m^3}{3\,\mathit{cos}\,m^3} - \frac{\mathit{sen}\,(m-q)}{\mathit{cos}\,(m-q)} - \frac{\mathit{sen}\,(m-q)^3}{3\,\mathit{cos}\,(m-q)^3}\Big) - k^2(\mathit{cos}\,q^3\,\mathit{sen}\,q$$
$$- \mathit{cos}\,q\,\mathit{sen}\,q^3)\,l\,\mathit{cos}\,(m-q) - \frac{k^2}{4}(6\,\mathit{cos}\,q^2\,\mathit{sen}\,q^2 -$$
$$\mathit{sen}\,q^4)\Big(\frac{\mathit{sen}\,(m-q)}{\mathit{cos}\,(m-q)}\Big) + \frac{k^2\,\mathit{cos}\,q\,\mathit{sen}\,q^3\,\mathit{sen}\,(m-q)^2}{2\,\mathit{cos}\,(m-q)^2}$$
$$- \frac{k^2\,\mathit{sen}\,q^4\,\mathit{sen}\,(m-q)^3}{12\,\mathit{cos}\,(m-q)^3}\Big];$$

formu-

formula, na qual Q' repreſenta o pezo que em cada inſtante ſe póde julgar em equilibrio com a impulſaõ do fluido.

607 Para moſtrarmos huma applicaçaõ muito ſimples deſta formula, ſupponhamos que a roda anda com huma velocidade, que ſe póde conſiderar infinitamente pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido. Em conſequencia teremos $k = 0$, e a equaçaõ (*C*) dará ſimpleſmente

$$Q'c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{cof\, m^2}{2}\right) + \frac{N\, ſen\, 2q}{8q}.$$

Logo, ſe quizermos que o momento de impulſaõ ſeja hum *maximo*, fazendo variar q ſomente, teremos $2q\,dq\,cof\,2q - dq\,ſen\,2q = 0$, e conſeguintemente $q = 0$. Donde ſe ſegue, que entaõ deveria ſer o numero das pennas infinito; reſultado conforme ao que achamos (n. 549.), e ſobre o qual ſe faraõ as meſmas reflexões.

Aqui obſervaremos mais, que conſtruindo a curva, cuja equaçaõ he $y = \frac{ſen\,2q}{q}$, acharemos que apartando-ſe da origem dos q, onde correſponde a maior ordenada $= 2$, a curva naõ cortará o eixo de huma e outra parte da meſma origem, ſenaõ a diſtancias infinitas. Donde reſulta que tendo aumentado o numero das pennas até hum certo ponto, naõ ſe ganharia quaſi nada em aumentallo mais. Póde cada hum ſegurar-ſe deſta concluſaõ por applicações numericas da meſma formula. A experiencia ſe acha de concerto com a theorica a eſte reſpeito.

608 Naõ he facil de achar directamente pela noſſa formula geral o numero mais ventajoſo de pennas para huma roda, que anda com huma velocidade finita, e comparavel com a do fluido, porque a equaçaõ do *maximo* he extremamente compoſta, e quaſi intratavel. Mas podemos conſeguillo de hum modo indirecto, que conſiſte em buſcar pela meſma formula os momentos de impulſaõ para differentes numeros conſecutivos de pennas, e eſcolher entre elles o que dá momento maior. Pela analogia das couſas, e pela lei de continuidade, facilmente ſe entende, que á medida que a roda andar mais de vagar deverá ter maior numero de pennas.

609 Na pratica, antes de fixar o numero das pennas,

he neceſſario fazer huma obſervaçaõ eſſencial. As pennas Kk, Oo, Pp, &c, que eſtaõ adiante da vertical CI tendem a impellir o fluido, o qual pela percuſſaõ tem perdido huma parte conſideravel da ſua velocidade. Por conſeguinte, ſe lhe naõ reſta velocidade ſufficiente para ſubtrahir-ſe da percuſſaõ das pennas, reſultará huma perda de movimento na maquina. O momento de impulſaõ das meſmas pennas contra o fluido he repreſentado por huma quantidade analoga á dos n.os 605 e 606. Neſte caſo pois os meſmos meios, que aumentaõ o momento de impulſaõ do fluido anterior á roda, aumentaõ tambem a reſiſtencia do poſterior; e entaõ naõ convem multiplicar muito o numero das pennas. He o que ſe practica com raſaõ nas rodas que ſe aſſentaõ ſobre os rios; antes a precauçaõ he exceſſiva neſta parte (n. 570.). As rodas que ſe movem em calhes eſtreitas requerem mais pennas, principalmente havendo a attençaõ (como ſe practica de ordinario) de dar hum pouco adiante da vertical CI maior quéda á agua, para lhe facilitar a ſahida de maneira que naõ faça reſiſtencia ao movimento da roda.

610 Supponhamos agora que he dado o numero das pennas, e vejamos qual deve ſer a velocidade da roda, para que o effeito ſeja hum *maximo*. Havendo multiplicado o primeiro membro da equaçaõ (C) por v velocidade do pezo levantado Q', e o ſegundo por $\frac{cu}{a}$ quantidade igual a v, e pondo em lugar de k o ſeu valor $\frac{u}{V}$; teremos huma equaçaõ deſta fórma

$$Q'v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

ſendo A, B, C coefficientes conſtantes e dados. Logo, para que o effeito da maquina ſeja hum maximo, he neceſſario que tenhamos $Adu + 2Bu\,du + 3Cu^2\,du = 0$; e conſeguintemente

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3A.C)}}{3C}.$$

611 Já indicámos (n. 552.) o modo de comparar os effeitos de duas aberturas rectangulares $MNOP$, $EFGH$ (Fig. 160.), relativamente aos momentos de impulſaõ contra as pennas de huma roda. Eiſaqui o modo geometrico de

de achar directamente a abertura mais ventajoſa.

Seja $SMPR$ a ametade da abertura, e $Smpr$ a ametade da penna ſuppoſta em quietaçaõ. Conſervando as meſmas denominações das letras b, k, c, d, e, t (n.553.), ſupponhamos que ſe toma ſobre TR hum ponto indeterminado L; e façamos $TL = y$, a gravidade $= g$, o momento elementar da impulſaõ da agua contra o pequeno rectangulo $Ldc = dM$, o raio Cr da roda $= R$. Eſtá claro, que a velocidade do fluido ao ſahir do pequeno orificio Ldc ſerá repreſentada por $\sqrt{2gy}$, e que teremos $dM = 2gbydy \cdot CL = 2gbydy(CT+TL) = 2gbydy(R-b-c+y)$. Logo $M = gby^2(R-b-c) + \frac{2gby^3}{3}$. Eſte integral deve deſvanecer quando $y = TS = b$, e tomar-ſe quando $y = Tr = b+c$. Logo ſerá $M = gb[(b+c)^2(R-b-c) + \frac{2}{3}(b+c)^3 - b^2(R-b-c) - \frac{2}{3}b^3]$.

Como pois a abertura mais ventajoſa he a que dá o maior M que he poſſivel, igualaremos a quantidade precedente a hum maximo, fazendo variar b, b, c; e aſſim teremos huma equaçaõ entre b, b, c, e as ſuas differenças. E porque a ſuperficie da penna $Smpr$ he dada, teremos tambem $bc = conſt.$ Em fim, como a quantidade de agua que fornece a abertura $SMPR$ he dada, teremos $\frac{4}{3}t(b+d)\left((b+c+e)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{e} = conſt.$ Por meio deſtas tres equações chegaremos a conhecer as tres indeterminadas b, b, c.

Todos eſtes calculos ſaõ longos em geral; mas podem abbreviar-ſe, conſiderando que as quantidades d, e ſaõ muito pequenas em comparaçaõ das outras.

612 Eiſaqui tudo o que pertence á theorica das rodas, quando ellas ſaõ verticais, e as pennas ſaõ dirigidas ao centro. As meſmas formulas ſe pódem applicar igualmente a toda a ſorte de rodas, verticais, ou horizontais, ſendo ou naõ ſendo as pennas dirigidas ao centro, perpendiculares ou inclinadas ao plano das meſmas rodas. Somente

mente os coefficientes do angulo q, do ſeu ſeno e coſeno, e dos ſenos e coſenos dos ſeus multiplos, ſeráõ differentes conforme os differentes caſos. Eſtes coefficientes dependem em parte do angulo que a penna faz com o raiõ, ou com o plano da roda; e eſta conſideraçaõ naõ introduz difficuldade alguma de novo no calculo. Deixamos ao Leitor o cuidado de fazer por ſi meſmo eſtas applicações.

CAPITULO IX.

Do movimento de oſcillaçaõ, e undulaçaõ dos fluidos.

613 HE demonſtrado (n. 171.) que ſe hum pendulo P (Fig. 175.) ſuſpendido pelo fio $O P$ deſcrever pequenos arcos de circulo $P p$, $Q q$ oſcillando ao redor do ponto fixo O, todas as ſuas oſcillaçoens ſeráõ iſochronas, ou da meſma duraçaõ, aindaque os arcos corridos $P p$, $Q q$ ſejaõ deſiguais. Eſte iſochroniſmo he fundado em que os eſpaços corridos $P p$, $Q q$ ſaõ proporcionais ás forças que os fazem correr.

Tambem he demonſtrado (n. 207.), que ſe dous pendulos de comprimentos deſiguais deſcreverem pequenos arcos de circulo, os tempos das ſuas oſcillações ſeráõ entre ſi como as raizes quadradas dos ſeus comprimentos.

614 Iſto poſto, ſeja $K L N M$ (Fig. 176.) hum tubo de groſſura uniforme, compoſto de dous braços verticais, e hum horizontal. Havendo lançado nelle certa quantidade de licor, as duas ſuperficies $A B$, $C D$ eſtaráõ de livel no caſo do equilibrio. Supponhamos que ſe faz ſubir o licor até $E F$ no braço $K L$, e conſeguintemente deſcer até $G H$ no braço $M N$, e que depois ſe deixa á acçaõ livre da gravidade. Eſtá claro, que o fluido ſubirá e deſcerá alternativamente.

Supponhamos pois hum pendulo P (Fig. 175.), cujo comprimento $O P$ ſeja ametade do comprimento $x y z$ da columna fluida, e que deſcreva até o ponto mais baixo I arcos $P I$ iguais aos eſpaços $A E$. A força que faz oſcillar o fluido he o exceſſo do pezo da agua contida em hum dos braços do tubo ſobre o pezo da agua contida no outro. Aſſim, quando a agua ſobe até $E F$ e deſce até $G H$, eſta

eſta força he o pezo da colunna *E S T F*, ou o dobro do pezo da colunna *E A B F*; e conſeguintemente he para o pezo de toda a a agua como 2 *A E* para xyz, ou como *A E* para *O P*.

Donde concluiremos 1º que ſendo o comprimento xyz conſtante, a força que faz oſcillar a agua he ſempre proporcional ao eſpaço que lhe faz correr; e por conſeguinte, que as oſcillações da agua ſaõ iſochronas entre ſi.

2º Que eſtas oſcillações ſaõ da meſma duraçaõ que as do pendulo *P*; porque a força que faz deſcrever ao pendulo *P* o arco *P I* he para o pezo do meſmo pendulo, como *P I* para *O P*, ou como *A E* para *O P*; e ſendo a agua animada da meſma força que o pendulo, deverá fazer as ſuas oſcillações no meſmo tempo que elle.

615 Por quanto as oſcillações da agua ſeguem as meſmas leis que as dos pendulos, ſe aumentarmos ou diminuirmos o comprimento da colunna da agua, tambem ſe aumentará ou diminuirá o tempo das ſuas oſcillações, e ſeguirá a raſaõ ſubduplicada do dito comprimento.

616 Eſta theorica das oſcillações dos fluidos ſe applica ao movimento das ondas. Seja *A B C D E F* (Fig. 177) huma maſſa de agua eſtagnante, cuja ſuperficie ſe levanta e abaixa por ondas ſucceſſivas, ſendo *A*, *C*, *E* as eminencias dellas, e *B*, *D*, *F* as cavidades intermedias. Por quanto a força, que faz deſcer as partes mais altas, e ſubir alternativamente as mais baixas, he ſempre o pezo da agua elevada, eſtá claro que as oſcillações das ondas ſaõ da meſma eſpecie que as da agua no tubo *KLNM*. Tomando pois hum pendulo, cujo comprimento ſeja a metade das diſtancias entre os lugares mais altos *A*, *C*, *E* e os mais baixos *B*, *D*, *F*, as partes mais altas *A*, *C*, *E* viráõ a ſer as mais baixas no tempo de huma oſcillaçaõ deſte pendulo, e no tempo de outra oſcillaçaõ tornaráõ a ſer as mais altas. Logo fará o pendulo duas oſcillaçoens em quanto as ondas fazem huma, iſto he, em quanto cada huma dellas corre a ſua largura. E como hum pendulo que tiveſſe o comprimento quadruplo do precedente faria huma oſcillaçaõ em quanto elle faz duas, ſegueſe que as ondas fazem as ſuas oſcillações no meſmo tempo que hum pendulo, que tiver por comprimento a largura das meſmas ondas.

617 Logo a velocidade das maiores ou das menores on-

das

das aumentará ou diminuirá na raſaõ ſubduplicada da ſua largura. As ondas, que tem 3 pés e 8 $\frac{1}{2}$ linhas de largura, correm-na em hum ſegundo, e conſeguintemente 183 pés 6 pollegadas e 6 linhas em 1 minuto.

Tudo iſto naõ deve tomar-ſe como verdadeiro em rigor, mas proximamente; porque havemos ſuppoſto que nas undulaçoens todas as partes da agua ſobem e deſcem em linhas rectas, o que naõ ſuccede na realidade, ſendo o dito movimento mais chegado a circular que á rectilineo.

Determinaçaõ geral das oſcillações de hum fluido em hum tubo de qualquer figura.

618 SEja *ABFDEG* (Fig. 178.) hum tubo de qualquer figura, no qual ſe contém huma porçaõ de fluido, que em virtude de huma cauſa exterior ſe levanta a certa altura no braço *ABFG*, e ſe abaixa conſeguintemente no outro *DEGF*, e depois ſe deixa á acçaõ livre da gravidade. Para determinar as ſuas oſcillações, he neceſſario conhecer a direcçaõ que tomaõ as particulas no ſeu movimento.

Sobre iſto podem propor-ſe duas hypotheſes. A primeira, que as particulas ſobem e deſcem verticalmente, iſto he, que ſuppondo-ſe o fluido dividido em camadas horizontais, eſtas conſervaõ ſempre o ſeu parallelíſmo; a ſegunda, que as particulas ſe movem parallelamente á curva *Mxyz* conſiderada como eixo do tubo, ou de outra ſorte, que ſuppondo-ſe o fluido dividido em camadas perpendiculares á curva *xyz*, eſtas camadas conſervaõ o ſeu parallelíſmo de humas a outras. O problema reſolve-ſe ſimpleſmente na primeira hypotheſe, pelo methodo que já havemos practicado (n. 236. 334.). Aqui o reſolveremos na ſegunda, a qual tem ſido abraçada por grandes Geometras.

619 Supponhamos, que o fluido no tempo *t* tem chegado á poſiçaõ indeterminada *ABFDEG*, e conſideremo-lo compoſto de huma infinidade de camadas *OLlo* iguais entre ſi, e perpendiculares em cada ponto á curva *Mxyz*. A força da gravidade, que obra verticalmente ſobre cada camada, ſe reſolverá em duas, huma perpendicular á

curva

curva que ſerá deſtruida, e a outra pela direcçaõ della, que produzirá o movimento.

Seja pois a gravidade $= g$; as ſecçoens $AB = K$, $DE = G$, $OL = y$; o arco xy da curva $= x$, a velocidade da ſuperficie $AB = u$, da ſecçaõ $OL = v$, o ſeno total $= 1$, o coſeno do angulo variavel myn que faz em y a vertical com a curva $= f$, a altura devida á velocidade $u = r$. Iſto poſto, a parte da gravidade que obra na direcçaõ yn ſerá gf; e ſe as camadas naõ obraſſem entre ſi, a velocidade v no fim do inſtante dt ſeria $v + gfdt$; e porque ella ſe faz realmente $v + dv$, he manifeſto que as differentes camadas animadas da velocidade $gfdt - dv$ deveriaõ fazer equilibrio entre ſi. Logo teremos $\int dx(gfdt - dv) = 0$; donde ſe tira (pondo por dt o ſeu valor $\frac{dx}{v}$, e por v o ſeu valor $\frac{Ku}{y}$)

$$\frac{gydx}{Ku}\int fdx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydu\int\frac{dy}{y^2} = 0.$$

Os integrais indicados devem tomar-ſe para a curva xyz. Sendo pois entaõ $\int fdx = F$, $\int\frac{dx}{y} = N$, e reflectindo que $\int\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2K^2} - \frac{1}{2G^2}$, a equaçaõ ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$(A)\ldots. F.G^2ydx - K^2G^2Ndr + rydx(G^2 - K^2) = 0.$$

620 Supponhamos, que o fluido no primeiro inſtante occupa o eſpaço $VZFHRG$; e repreſentemos por z o arco Mx corrido pela ſuperficie AB. Eſtá claro, que ſendo dada a natureza da curva $Mxyz$, e ſendo os dous eſpaços $VZFHRG, ABFDEG$ occupados ſucceſſivamente pelo fluido iguais entre ſi, as quantidades F, G, K, N, ydx, podem ſer repreſentadas em funçoens de z, dz, e conſtantes. Logo a velocidade u da ſuperficie AB ſerá tambem huma funçaõ de z; e por ſer $dt = \frac{dz}{u}$, do meſmo modo teremos t em funçaõ de z.

621 Para moſtrarmos a applicaçaõ deſta theorica a alguns exemplos, ſupponhamos que o tubo he cylindrico, e que a curva $Mxyz$ he a ſemicircumferencia de hum circulo

circulo, cujo diametro MT eſtá horizontal. Neſte caſo teremos $G = K = y$, e cada huma deſtas quantidades ſerá conſtante, e dada. Seja o raio $CM = 1$, o arco $Mx = z$, o arco indeterminado $Mxy = q$, a ſemicircumferencia $Mxyz T = c$, o arco xyz occupado pelo fluido $= nc$, ſendo n hum numero conſtante menor que a unidade. Aſſim teremos $F = \int f dx = \int dq \, cos\, q = sen\, q$; integral, que deve deſvanecer quando $q = z + nc$, e começar quando $q = z$, porque na extremidade z do arco zyz ceſſa a gravidade de obrar ſobre o fluido, e o ponto x he a origem do meſmo fluido. Logo $F = sen\, z - sen(z + nc)$. Além diſto $N = \frac{nc}{G}$, e $dx = dz$. Logo a equaçaõ geral (A) ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$dz\,(sen\, z - sen(z + nc)) - nc\,dr = 0,$$

donde ſe tira (ſuppondo que o fluido parte do ponto M, e conſeguintemente que $r = 0$ quando $z = 0$)

$$r = \frac{1 - cos\, nc - cos\, z + cos(z + nc)}{nc},$$

expreſſaõ geral da altura devida á velocidade da ſuperficie AB.

Se fizermos $z = c - nc$, iſto he, ſe ſuppuſermos que a ſuperficie anterior DE chega a T, acharemos igualmente $r = 0$. Donde ſe ſegue, que o fluido haverá perdido toda a ſua velocidade, e tornará a deſcer de T para M, e aſſim por diante.

O tempo de cada huma das oſcillações ſe achará pela equaçaõ $t = \int \frac{dz}{u} = \int \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$; e ſubſtituindo o valor de r,

$$t = \sqrt{\frac{c}{2g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - cos\, nc - cos\, z + cos(z + nc))}}.$$

622 Por ſegundo exemplo, ſupponhamos que o tubo propoſto ſe compoem de tres rectilineos $GFKH$, MFG, NKH (Fig. 179.) de diametros iguais, eſtando o primeiro delles horizontal, e os outros inclinados. Levantando as verticais FI, KS, ſeja a ſecçaõ conſtante e perpendicular de cada tubo $= K$, o coſeno do angulo $BFI = p$, o do angulo $DKS = q$, o comprimento dado $xytz$ do eſpaço occupado pelo fluido $= l$, o eſpaço dado My comprehendido

dido entre hum ponto fixo M tomado a arbitrio e o ponto $y = b$, o comprimento dado do tubo horizontal $= c$, o eſpaço Mx corrido no tempo t pela ſuperficie do fluido $AB = z$.

Iſto poſto, como ſe naõ obſerva a lei de continuidade na paſſagem de hum tubo para outro, applicaremos a cada hum delles os raciocinios do nº 619; e acharemos, que para o tubo $ABFG$ he a quantidade $\int f dx = p(b-z)$, e para o tubo $EDKH$ será $\int f dx = q \cdot tz = q(z+l-b-c)$. Tirando a ſegunda quantidade da primeira, o reſto $p(b-z) - q(z+l-b-c)$ será o valor de F para o tubo total. Tambem teremos aqui $\int \frac{dx}{y}$, ou $N = \frac{l}{K}$; e obſervando, que $y = K$, $dx = dz$, $G = K$, a equaçaõ geral (A) ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$dz\,(p(b-z) - q(z+l-b-c)) - l\,dr = o;$$

donde ſe tira

$$r = \frac{p+q}{2l}\left(\frac{2(pb+qb+qc-ql)z}{p+q} - zz\right).$$

E porque $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, teremos tambem

$$t = \sqrt{\frac{l}{g(p+q)}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(pb+qb+qc-ql)z}{p+q} - zz\right)}};$$

integral, que depende em geral da quadratura do circulo.

623 Repreſentemos, por abbreviar, o coefficiente de z por $2A$; e ſeja B o quarto da circumferencia deſcrita com o raio A, e T o tempo empregado em correr o eſpaço A. Aſſim teremos $t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{g(p+q)}} \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az - zz)}}$, e $T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g(p+q)}} \cdot \frac{B}{A}$; porém $\frac{B}{A}$ he huma quantidade conſtante, qualquer que ſeja o raio A; logo T he huma quantidade conſtante, e conſeguintemente as oſcillaçoens inteiras do fluido ſaõ iſochronas entre ſi, quaiſquer que ſejaõ as ſuas amplitudes.

624 Seja L o comprimento de hum pendulo que deſcreve pequenos arcos de circulo, C a diſtancia inicial delle á vertical, D o quarto da circumferencia para o raio C,

z o eſpaço que o pendulo deſçreve circularmente no tempo t com a velocidede v, T' o tempo que gaſta em chegar á vertical; e teremos $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$, e conſeguintemente $vv = \frac{g(2Cz-zz)}{L}$. Logo $t = \int \frac{dz}{v} = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz-zz)}}$, e $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{D}{C}$. Igualando eſte valor de T' ao de T, e reflectindo que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, teremos $L = \frac{l}{p+q}$, expreſſaõ do comprimento do pendulo, que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido. Eſte reſultado concorda com o que foi dado por M. Bernoulli ſem demonſtracçaõ (*Oper. tom. III. pag.* 125.

625 Quando os tubos *ABFG*, *EDKH* ſaõ verticais, temos $p = 1$, $q = 1$; e a equaçaõ $L = \frac{l}{p+q}$ ſe reduz a $L = \frac{1}{2}l$, iſto he, que o comprimento do pendulo que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido he a ametade do comprimento da colunna fluida, como já moſtrámos de outro modo (n. 614.).

CAPITULO X.

Do movimento dos fluidos elaſticos.

626 NAõ he da minha intençaõ tratar muito por extenſo do movimento dos fluidos elaſticos, porque a theorica delles ſe acha ainda imperfeita nos ſeus elementos eſſenciais. O frio, e o calor produzem na virtude elaſtica variaçoens continuas, cuja lei ſe naõ ſabe com a exactidaõ que convinha, para fundar huma theorica ſegura. Sem me entregar pois a generalidades hypotheticas, e embaraçadas pela prolixidade dos calculos, examinarei ſómente o movimento do ar, e neſſe meſmo naõ tocarei mais que os problemas que podem ſer de mais uſo na practica.

627 Seja

627 Seja *ABCD* (Fig. 180.) hum cylindro fechado de todos os lados, que contém hum ar homogeneo, e igualmente denſo em toda a ſua extenſaõ. Eſte ar eſtá comprimido, e aſſim que ſe lhe der alguma ſahida, ou ſe lhe facilitar a dilataçaõ, dilatar-ſe-ha uniformemente, e a ſua elaſticidade ſe diminuirá. A força elaſtica em cada eſtado de compreſſaõ he ſempre igual á força que tem produzido eſſa compreſſaõ (n. 73. 89.). Aſſim, por exemplo, ſe o ar *ABCD* he ſemelhante ao exterior, e conſeguintemente foi comprimido pelo pezo da atmosfera, ou por huma força equivalente, ſuſtentará pela ſua elaſticidade o pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura; iſto he, ſe a tampa ſuperior *AE* ſe conſiderar livremente movel ao longo das paredes laterais, e ſe imaginar carregada em toda a ſua ſuperficie de huma colunna de agua de 32 pés de altura, haverá equilibrio entre o pezo da agua, e a força elaſtica do ar; e a tampa naõ poderá ſubir, nem deſcer. Suppomos, que o ar ſe conſerva ſempre no meſmo gráo de calor; porque ſe eſte vieſſe a aumentar ou diminuir, tambem a elaſticidade aumentaria, ou diminuiria. Do meſmo modo, quando compararmos entre ſi as elaſticidades de differentes maſſas de ar, ſupporemos ſempre que todas eſtaõ no meſmo gráo de temperatura.

628 Conſta pela experiencia (n. 92. 94.), que ſe a meſma quantidade de ar ſe reduzir a occupar ſucceſſivamente differentes volumes, as forças que a comprimem, e conſeguintemente as ſuas forças elaſticas ſaõ na raſaõ inverſa dos volumes, ou na directa das denſidades. Porém reduzir huma meſma maſſa de ar a occupar differentes volumes, he o meſmo que fazer entrar em hum meſmo volume differentes quantidades de ar, cujas denſidades ſejaõ as meſmas reſpectivamente que as da maſſa propoſta nos differentes eſtados. Logo, ſe differentes quantidades de ar occuparem ſucceſſivamente o meſmo volume, as elaſticidades ſeraõ proporcionais ás meſmas quantidades, porque eſtas, ſendo o volume conſtante, ſaõ na raſaõ das denſidades.

629 Daqui ſe ſegue, que abrindo em *C* hum pequeno orificio, pelo qual o ar tenha a liberdade de ſahir para o vacuo, continuamente ſahirá com a meſma velocidade que tiver no primeiro inſtante; porque a denſidade

de do fluido, e a força elaſtica que produz a fluxaõ pela abertura C, diminuem na meſma raſaõ; e quando a maſſa movida, e a força movente conſervaõ entre ſi a meſma raſaõ, a velocidade he conſtante. Se iſto naõ parece claro, eiſaqui huma prova mais ſenſivel.

Seja no primeiro inſtante a força elaſtica $= P$, a denſidade do fluido $= Q$, a ſua velocidade $= V$, e no fim de hum tempo t ſeja a denſidade $= q$, e a velocidade $= u$. Eſtá claro, que a força elaſtica no fim do tempo t ſerá $\frac{Pq}{Q}$; e como as forças motrizes ſaõ proporcionais ás quantidades de movimento, repreſentando por M, m as maſſas de ar que nos dous caſos ſahem pelo orificio em inſtantes iguais, teremos $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Porém as maſſas M, m ſaõ na raſaõ compoſta dos ſeus volumes e denſidades, e os volumes ſaõ na raſaõ das velocidades, por ſer o orificio conſtante. Logo $M : m :: QV : qu$, e conſeguintemente $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$; donde ſe tira $u = V$.

630 Sendo pois a força elaſtica primitiva P igual ao pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura, he facil de ver que o ar ſahirá continuamente pelo orificio C com a meſma velocidade, com que a agua ſahiria de huma reſerva debaixo de 32.850 ou de 27200 pés de altura.

631 Seja H a altura devida á velocidade conſtante do fluido V no orificio C, A o volume do cylindro, C a area do orificio, a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. No inſtante dt ſahirá pelo orificio hum pequeno volume de ar repreſentado por $2CdtV\sqrt{aH}$ (n. 233.), e conſeguintemente huma pequena maſſa repreſentada por $2CqdtV\sqrt{aH}$. Mas por outra parte he evidente, que depois do tempo t a maſſa de ar contida no cylindro he $AQ - Aq$. Logo teremos $2CqdtV\sqrt{aH} = d(AQ - Aq)$, ou $dt = -\frac{dq}{q} \cdot \frac{A}{2CV\sqrt{aH}}$. E integrando de maneira, que $q = Q$ dê $t = o$, acharemos

$t =$

$$t = \frac{A}{2C\sqrt{aH}} \cdot l\frac{Q}{q}.$$

Por eſta expreſſaõ do tempo ſe vê, que o vaſo naõ poderá evacuar-ſe de todo, ſenaõ em hum tempo infinito.

632 Supponhamos agora, que o ar naõ ſahe do vaſo $ABCD$ para hum eſpaço vazio, mas para hum eſpaço cheio de ar mais raro, de huma extenſaõ infinita, como ſe póde ſuppor a da atmosfera em comparaçaõ do vaſo. Guardando as denominações do n° 629, e fazendo a denſidade do ar exterior $= D$, he evidente que a reſiſtencia conſtante que elle oppoem á ſahida do interior, he $\frac{PD}{Q}$. Aſſim ſerá a força expulſiva do ar interior no primeiro inſtante $P - \frac{PD}{Q}$, e depois do tempo t ſerá $\frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q}$. Logo teremos $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q} :: MV : mu :: QV\sqrt{V} : qu\sqrt{u}$. Donde ſe tira

$$u = V\sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}};$$

equaçaõ, que dá a cada inſtante a relaçaõ entre u e q, porque todas as mais quantidades ſaõ conſtantes. Por ella ſe vê, que o ar ceſſará de correr quando for $q = D$, e que naõ haverá movimento, ſe for $Q = D$.

633 Sendo H a altura devida á velocidade V, he evidente que a altura devida á velocidade u haverá de ſer $\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}H$. Por tanto ſahirá no inſtante dt a pequena maſſa de ar $2Cqdt\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}} = d(AQ - Aq)$; donde ſe tira $dt = -\frac{dq}{V(qq-Dq)} \cdot \frac{AV(Q-D)}{2C\sqrt{aHQ}}$. E integrando de maneira que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$$t = \frac{AV(Q-D)}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + V(Q^2 - DQ)}{q - \frac{1}{2}D + V(qq-Dq)}\right);$$

E por quanto temos viſto que o ar ceſſa de correr, quando